

中 I 教 p140~153 反比例と関数の利用

反比例と比例定数

yがxに反比例するとき、xとyの関係を、比例定数aを用いて表そう。

【重要点】

- ✓ 変数xとyの関係が $y = \frac{a}{x}$ で表されるとき、「yはxに反比例する」という。
(例) 60個のチョコレートをx人で分けたときの、1人がもらえる個数y個とすると $\dots y = \frac{60}{x}$
- ✓ 反比例を表す式 $y = \frac{a}{x}$ は、 $xy = a$ と変形できるので、「xとyをかけたら、いつもaになる」という意味。
(例) $y = \frac{60}{x}$ は、 $xy = 60$ と変形でき、「xの値とyの値をかけたら、いつも60になる」という意味。
- ✓ いろいろな値をとることができる「変数」に対して、値が定まっていて変わらない数を「定数」という。
- ✓ 特に反比例を表す式 $y = \frac{a}{x}$ において、aの部分を「比例定数」という。
(例) $y = \frac{60}{x}$ の比例定数は、60

【解答】

$$y = \frac{a}{x}$$

反比例の見きわめ

次のア~ウについて、yをxの式で表し、yがxに反比例するものを選ぼう。またその比例定数を答えよう。

ア 1個120円のチョコをx個買ったときの値段がy円

イ 横がxcm、縦がycmである長方形の面積が20cm²

ウ 1辺がxcmである正方形の面積ycm²

【重要点】

- ✓ 変数xとyの関係が $y = \frac{a}{x}$ で表されるとき、「yはxに反比例する」という。
- ✓ 反比例を表す式 $y = \frac{a}{x}$ において、aの部分を「比例定数」という。
(例) $y = \frac{60}{x}$ の比例定数は、60
- ✓ yをxの式で表すには、具体例や図を考えて式を作り、 $y = \sim$ の形にする。

【解答】

ア 代金は $120 \times x = 120x$ なので、代金 $y = 120x$

イ $x \times y = 20$ となるので、両辺をxで割って、 $y = \frac{20}{x}$

ウ $x \times x = y$ だから、 $y = x^2$

以上より、反比例はイ、その比例定数は20

反比例の表

次の表で、yはxに反比例している。

yをxの式で表そう。

また表を完成させよう。

x	-3	-2	-1	1	2	
y				6		1

【重要点】

- ✓ yはxに反比例するとき、その式は $y = \frac{a}{x}$ となる。aの部分を「比例定数」という。
- ✓ yはxに反比例するとき、xとyをかけたら、いつも同じ値になる。その値が比例定数のaである。

【解答】

yはxに反比例するので、
xとyをかけたら、
いつも同じ値になる。

x	-3	-2	-1	1	2	6
y	-2	-3	-6	6	3	1

x = 1のとき、y = 6より、その積は6なので、xとyをかけたら6になる値を考えると、上の表になる。

また求める式は、 $y = \frac{6}{x}$

比例の表と反比例の表

次の表を見て答えよう。

- (1) yはxに比例しているときの表を完成させよう。
(2) yはxに反比例しているときの表を完成させよう。

x	-3	-2	-1	1	2	3
y				-6		

【重要点】

- ✓ yがxに比例するとき、xの値が2倍、3倍、...になれば、yの値も2倍、3倍、...になる。
- ✓ yがxに反比例するとき、xの値が2倍、3倍、...になれば、yの値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、...になる。

【解答】

- (1) yがxに比例するとき、xの値が2倍、3倍、...になれば、yの値も2倍、3倍、...になるので、

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	18	12	6	-6	-12	-18

- (2) yがxに反比例するとき、xの値が2倍、3倍、...になれば、yの値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、...になる。

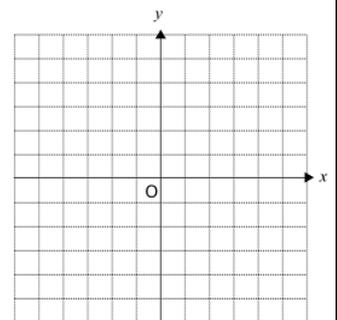
x	-3	-2	-1	1	2	3
y	2	3	6	-6	-3	-2

反比例のグラフの形

反比例のグラフはどんな形になるか？

$y = \frac{6}{x}$ のグラフを例に、通る点を調べて、書いてみよう。

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y								



【重要点】

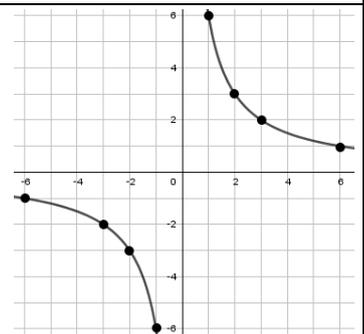
- ✓ グラフの形がわからなくても、通る点を調べることで、書くことができる。

【解答】

反比例のグラフは、なめらかな2つの曲線になる。

(原点についててんたいしゅう点対称な双曲線そうきょくせん)

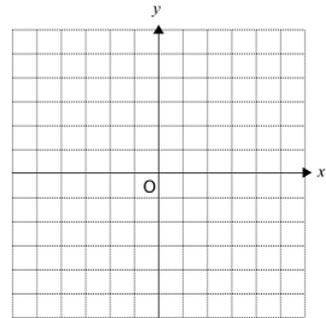
x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1



反比例のグラフの書き方

次のグラフを書こう。

- (1) $y = \frac{4}{x}$
- (2) $y = -\frac{6}{x}$



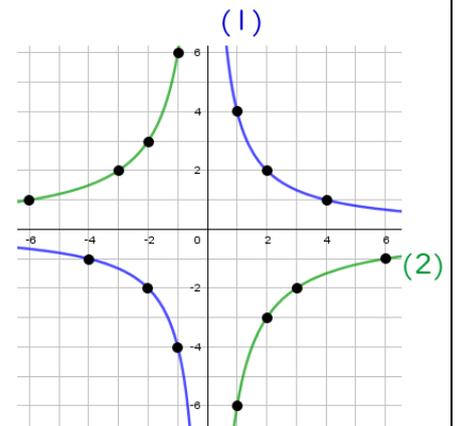
【重要点】

- ✓ 反比例のグラフは、なめらかな2つの曲線(原点について点対称な双曲線)になる。
- ✓ 曲線を書くには、1つでも多く通る点を調べる。

【解答】

(1)
 $x = 1$ のとき、 $y = 4$ となるので、点(1, 4)を通る。
 同様に調べていくと、点(2, 2), 点(-1, -4), 点(-2, -2)を通る。

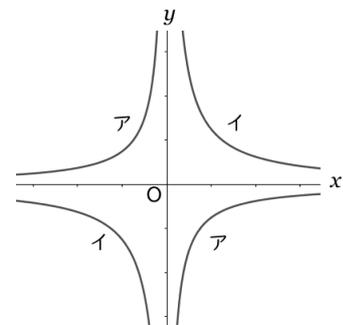
(2)
 $x = 1$ のとき、 $y = -6$ となるので、点(1, -6)を通る。
 同様に調べていくと、点(2, -3), 点(3, -2), 点(6, -1)
 点(-1, 6), 点(-2, 3), 点(-3, 2), 点(-6, 1)を通る。



反比例のグラフの見きわめ

次の(1)(2)のグラフは、それぞれ図のアかイのどちらになる？

- (1) $y = \frac{5}{x}$
- (2) $y = -\frac{3}{x}$



【重要点】

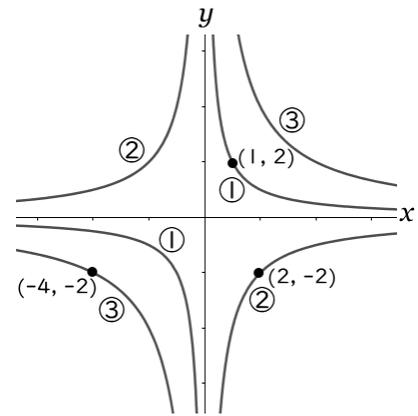
- ✓ 反比例のグラフは、なめらかな2つの曲線(原点について点対称な双曲線)になる。
- ✓ 反比例のグラフは、比例定数が正なら、右上と左下にある。
- ✓ 反比例のグラフは、比例定数が負なら、右下と左上にある。

【解答】

- (1) 比例定数が正なので、右上と左下にあるイ
- (2) 比例定数が負なので、右下と左上にあるア

グラフから反比例の式を求める

次の①～③の反比例のグラフについて、 y を x の式で表そう。



【重要点】

- ✓ y は x に反比例するとき、その式は $y = \frac{a}{x}$ となる。
- ✓ y は x に反比例するとき、 x と y をかけたら、いつも同じ値になる。その値が比例定数の a である。
- ✓ もしくは、 a を求めるには、グラフが通っている点(どれか1つ)の座標を代入する。

【解答】

(1)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 1$ のとき $y = 2$ なので、
 $1 \times 2 = 2$

よって、 $y = \frac{2}{x}$

(別解)

反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
点(1, 2)を通っているので、
 $2 = \frac{a}{1}$ より、 $a = 2$

よって、 $y = \frac{2}{x}$

(2)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 2$ のとき $y = -2$ なので、
 $2 \times (-2) = -4$

よって、 $y = -\frac{4}{x}$

(別解)

反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
点(2, -2)を通っているので、
 $-2 = \frac{a}{2}$ より、 $a = -4$

よって、 $y = -\frac{4}{x}$

(3)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = -4$ のとき $y = -2$ なので、
 $(-4) \times (-2) = 8$

よって、 $y = \frac{8}{x}$

(別解)

反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
点(-4, -2)を通っているので、
 $-2 = \frac{a}{-4}$ より、 $a = 8$

よって、 $y = \frac{8}{x}$

文章から反比例の式を求める

yがxに反比例しているとき、次の場合についてyをxの式で表そう。

- (1) $x = -2$ のとき $y = 5$ (2) $x = 4$ のとき $y = -3$ (3) $x = -6$ のとき $y = -\frac{2}{3}$

【重要点】

- ✓ y は x に反比例するとき、その式は $y = \frac{a}{x}$ となる。
- ✓ y は x に反比例するとき、 x と y をかけたら、いつも同じ値になる。その値が比例定数の a である。
- ✓ もしくは、 a を求めるには、 x と y の値を代入する。

【解答】

(1)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = -2$ のとき $y = 5$ なので、
 $(-2) \times 5 = -10$
よって、 $y = -\frac{10}{x}$

(別解)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = -2$ のとき $y = 5$ なので、
 $5 = \frac{a}{-2}$ より、 $a = -10$
よって、 $y = -\frac{10}{x}$

(2)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 4$ のとき $y = -3$ なので、
 $4 \times (-3) = -12$
よって、 $y = -\frac{12}{x}$

(別解)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 4$ のとき $y = -3$ なので、
 $-3 = \frac{a}{4}$ より、 $a = -12$
よって、 $y = -\frac{12}{x}$

(3)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = -6$ のとき $y = -\frac{2}{3}$ なので、
 $-\frac{2}{3} \times (-6) = 4$
よって、 $y = \frac{4}{x}$

(別解)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = -6$ のとき $y = -\frac{2}{3}$ なので、
 $-\frac{2}{3} = \frac{a}{-6}$ より、 $a = 4$
よって、 $y = \frac{4}{x}$

反比例の式とyの値を求める

- (1) y は x に反比例していて、 $x = 3$ のとき $y = 12$ である。 $x = -4$ のときの y の値を求めよう。
(2) y は x に反比例していて、 $x = 8$ のとき $y = -6$ である。 $x = 12$ のときの y の値を求めよう。

【重要点】

- ✓ y は x に反比例するとき、その式は $y = \frac{a}{x}$ となる。
- ✓ y は x に反比例するとき、 x と y をかけたら、いつも同じ値になる。その値が比例定数の a である。
- ✓ もしくは、 a を求めるには、 x と y の値を代入する。

【解答】

(1)
反比例より、 x と y をかけたらいつも同じ値になるので、 $3 \times 12 = 36$ から、 $x = -4$ のときの y の値は、
かけて36になる数を考えて、 -9

(別解)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 3$ のとき $y = 12$ なので、
 $12 = \frac{a}{3}$ より、 $a = 36$ よって、 $y = \frac{36}{x}$
 $x = -4$ のとき、 $y = \frac{36}{-4} = -9$

(2)
反比例より、 x と y をかけたらいつも同じ値になるので、 $8 \times (-6) = -48$ から、 $x = 12$ のときの y の値は、
かけて -48 になる数を考えて、 -4

(別解)
反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 8$ のとき $y = -6$ なので、
 $-6 = \frac{a}{8}$ より、 $a = -48$ よって、 $y = -\frac{48}{x}$
 $x = 12$ のとき、 $y = -\frac{48}{12} = -4$

反比例の式とxの値を求める

- (1) y は x に反比例していて、 $x = 5$ のとき $y = -5$ である。 $y = 3$ のときの x の値を求めよう。
 (2) y は x に反比例していて、 $x = 4$ のとき $y = 2$ である。 $y = -\frac{3}{2}$ のときの x の値を求めよう。

【重要点】

- ✓ y は x に反比例するとき、その式は $y = \frac{a}{x}$ となる。
- ✓ y は x に反比例するとき、 x と y をかけたら、いつも同じ値になる。その値が比例定数の a である。
- ✓ もしくは、 a を求めるには、 x と y の値を代入する。

【解答】

(1)
 反比例より、 x と y をかけたらいつも同じ値になるの
 で、 $5 \times (-5) = -25$ から、 $y = 3$ のときの x の値は、
 かけて -25 になる数を考えて、 $-25 \div 3 = -\frac{25}{3}$

(別解)

反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 5$ のとき $y = -5$ なので、
 $-5 = \frac{a}{5}$ より、 $a = -25$ よって、 $y = -\frac{25}{x}$
 $y = 3$ のとき、 $3 = -\frac{25}{x}$
 両辺を x 倍して、 $3x = -25$ より、 $x = -\frac{25}{3}$

(2)

反比例より、 x と y をかけたらいつも同じ値になるの
 で、 $4 \times 2 = 8$ から、 $y = -\frac{3}{2}$ のときの x の値は、
 かけて 8 になる数を考えて、

$$8 \div \left(-\frac{3}{2}\right) = 8 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

(別解)

反比例なので、 $y = \frac{a}{x}$
 $x = 4$ のとき $y = 2$ なので、
 $2 = \frac{a}{4}$ より、 $a = 8$ よって、 $y = \frac{8}{x}$
 $y = -\frac{3}{2}$ のとき、 $-\frac{3}{2} = \frac{8}{x}$
 両辺を x 倍して、 $-\frac{3}{2}x = 8$
 $-3x = 16$ より、 $x = -\frac{16}{3}$

比例の利用

- ある紙 50 枚の重さは 100g である。
 (1) この紙 x 枚の重さを y g とするとき、 y を x の式で表そう。
 (2) この紙が 210 枚あるときの重さを求めよう。
 (3) 重さが 390g のとき、この紙は何枚あるか求めよう。

【重要点】

- ✓ まず 1 つあたりの大きさを求める。
- ✓ 図や具体例を考えれば、式が見えてくる。
- ✓ 式を利用すれば、色々な値を求められる。

【解答】

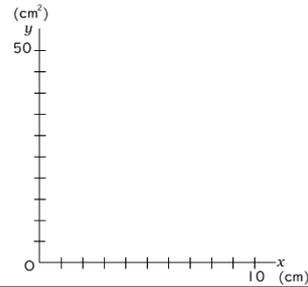
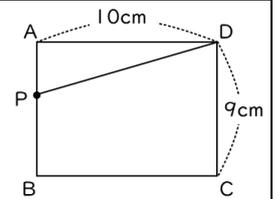
(1)
 紙 50 枚で重さ 100g なので、
 1 枚あたりの重さは、
 $100 \div 50 = 2$ より、2g とわかる。
 よって、 $y = 2x$

(2)
 (1)より、 $y = 2x$ を利用する。
 $x = 210$ のとき、
 $y = 2 \times 210 = 420$
 よって **420g**

(3)
 (1)より、 $y = 2x$ を利用する。
 $y = 390$ のとき、
 $390 = 2x$ より、 $x = 195$
 よって **195 枚**

動点の問題

図のような長方形 ABCD の辺 AB 上を、
 点 P が A を出発して秒速 1cm で B まで進む。
 P が A を出発してから x 秒後の三角形 APD の面積を $y\text{cm}^2$ とする。



- (1) x の変域を求めよう。
- (2) y を x の式で表そう。
- (3) x と y の関係をグラフに表そう。
- (4) y の変域を求めよう。

【重要点】

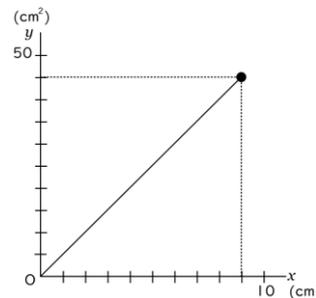
- ✓ x の変域を求めるには、文章を読んで、 x のとりうる値の範囲を考える。
- ✓ y を x の式で表すには、図や具体例などから、文字の式を作る。
- ✓ x と y の関係をグラフに表すには、 x と y の式から比例や反比例を判断する。
- ✓ y の変域を求めるには、グラフを見て、 y のとりうる値の範囲を考える。

【解答】

(1)
 点 P は A を出発してから
 9 秒で点 B に到着するの
 で、 $0 \leq x \leq 9$

(2)
 $\triangle APD$ は底辺 $x\text{cm}$ で高さ
 10cm の三角形なので、
 面積 $y = x \times 10 \div 2$
 $y = 5x$

(3)
 9 秒後の面積は、
 (2) より $5 \times 9 = 45$ な
 ので、求めるグラフは、点
 $(9, 45)$ を通る。



(4)
 (3) のグラフより、
 $0 \leq y \leq 45$

反比例の利用

面積が 24cm^2 の三角形 ABC がある。

(1) 底辺を $x\text{cm}$ 、高さを $y\text{cm}$ とするとき、 y を x の式で表そう。

(2) x の変域が $1 \leq x \leq 24$ のとき、 y の変域を求めよう。

(3) 底辺が 6cm のときの高さを求めよう。

(4) 高さが 10cm のときの底辺を求めよう。

【重要点】

- ✓ 図や具体例を考えれば、式が見えてくる。
- ✓ **変域を考えるには、グラフを描く。**
- ✓ **式を利用すれば、色々な値を求められる。**

【解答】

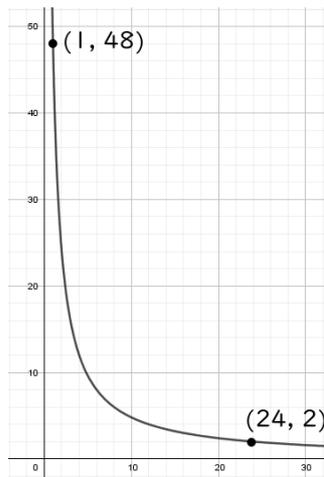
(1)

$$x \times y \div 2 = 24 \text{ より、}$$

$$x \times y = 48$$

$$y = \frac{48}{x}$$

(2)



(1)より、 $y = \frac{48}{x}$ のグラフ
を描いて、 $2 \leq y \leq 48$

(3)

(1)より、 $y = \frac{48}{x}$ なので、
 $x = 6$ を代入して、
 $y = \frac{48}{6} = 8$
よって、**8cm**

(4)

(1)より、 $y = \frac{48}{x}$ なので、
 $y = 10$ を代入して、
 $10 = \frac{48}{x}$
 $10x = 48$
 $x = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$
よって、 **$\frac{24}{5}\text{cm}$**