中２　教 p38～53　連立方程式

2元1 次方程式とは？

【要点】

(1) 2 元 1 次方程式とは？　　　(2) 2 元 1 次方程式を見極めるには？

(1) ◎x + □y = ～ のような、文字が 2 つの方程式。

ここまでの数学で方程式を勉強しましたよね。これまでは $x+3=5$ のような、文字が 1 つの方程式でした。ここからは、$x+3y=5$ のような文字が 2 つの方程式を勉強します。この ◎x + □y = ～ のような、文字が 2 つの方程式を 2 元 1 次方程式といいます。

(2) 式変形して ◎x + □y = ～ のような形にできれば、2 元 1 次方程式。

「2 元 1 次方程式を選ぼう」という問題が、たまに出てきます。どうやって見極めればいいでしょうか？やり方はシンプルです。「2 元 1 次方程式の形に持ち込めるか？」つまり、「◎x + □y = ～ のような形にできるか？」を考えます。例えば $6y-4=2x$ は、$-2x+6y=4$ と式変形できます。ので、2 元 1 次方程式といえます。

【例題】

次のア～エの式のうち、2 元 1 次方程式をすべて選び記号で答えよう。

ア　$3x-4=5$　　　イ　$-6x+7y$　　　ウ　$8x-9y+10=0$　　　エ　$\frac{4}{5}a-3=\frac{1}{2}b$

ア　文字が 1 つなので違う。

イ　イコールがないので違う。

ウ　文字が 2 つで、$8x-9y=-10$ に変形できるので、2 元 1 次方程式。

エ　文字が 2 つで、$\frac{4}{5}a-\frac{1}{2}b=3$ に変形できるので、2 元 1 次方程式。

以上より、**ウとエ**

「◎x + □y = ～ のような形にできるか？」を考えます。

2 元 1 次方程式の解とは？

【要点】

(1) 2 元 1 次方程式の解とは？　　　(2) 方程式の解であるか、確かめるには？

(1) 2 元 1 次方程式を成り立たせる x と y の値のこと。

方程式の解とは、「その方程式を成り立たせる値」のことです。例えば「方程式 $x+2=5$ の解は、$x=3$」です。$x=3$ のとき、$x+2=5$ となりますもんね。

2 元 1 次方程式でも同じです。2 元 1 次方程式の解とは、「その方程式を成り立たせる値の組み合わせ」のことです。例えば $x+2y=4$ の解は、$(x,y)=(0,2)$ です。$(x,y)=(0,2)$とは、「$x=0,\ y=2$」という意味です。他にも、$(x,y)=\left(1,\frac{3}{2}\right),(2,1),$ なども、この 2 元 1 次方程式の解です。このように、条件がない限り、2 元 1 次方程式の解は無数にあります。

(2) 方程式に代入して、その式が成り立てば、その方程式の解。

方程式の解であるかどうか確かめるには、与えられた方程式に代入すればわかります。例えば、「$(x,y)=(3,\ -2)$は $-2x+3y=-12$ の解であるか？」調べるには、$-2x+3y$ に $(x,y)=(3,\ -2)$ を代入します。$-2\times3+3\times(-2)=-12$ となり、与えられた方程式と一致するので、$(x,y)=(3,\ -2)$ は、この方程式の解です。代入して一致しない場合は、その方程式の解ではありません。

【例題】

次のア～エの(x, y)のうち、２元１次方程式 $3x-4y=6$ の解をすべて選び記号で答えよう。

ア　$(x,y)=(2,0)$　　イ　$(x,y)=(6,6)$　　ウ　$(x,y)=(-2,3)$　　エ　$(x,y)=(\frac{2}{3},-1)$

ア $3x-4y$ に $(x,y)=(2,0)$ を代入すると、$3\times2-4\times0=6$ なので、解である。

イ $3x-4y$ に $(x,y)=(6,6)$ を代入すると、$3\times6-4\times6=-6$ なので、解ではない。

ウ $3x-4y$ に $(x,y)=(-2,3)$ を代入すると、$3\times(-2)-4\times3=-18$ なので、解ではない。

エ $3x-4y$ に $(x,y)=\left(\frac{2}{3},-1\right)$ を代入すると、$3\times\frac{2}{3}-4\times(-1)=6$ なので、解である。

以上より、**アとエ**

方程式に代入して、その式が成り立つなら、その方程式の解です。成り立たなければ、その方程式の解じゃありません。

連立方程式とは？

【要点】

(1) 連立方程式とは？　　(2) 連立方程式の解とは？

(1) ２つ以上の方程式を組み合わせたもの。

方程式を２つ以上組み合わせたものを、連立方程式といいます。右の式のような感じです。

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$$

(2) 組み合わされた全ての方程式を成り立たせる値。

右の連立方程式の解は、$(x,y)=(2,3)$ です。$x+y=5$ に代入しても、$2x+3y=13$ に代入しても、両方とも成り立つからです。このように、組み合わされた連立方程式の、全ての式を成り立たせる値が、連立方程式の解です。１つだけが成り立つ場合などは、連立方程式の解にはなりません。全ての式が成り立つときだけ、連立方程式の解となります。

【例題】

次のア～ウの連立方程式のうち、解が$(x,y)=(2,-3)$であるものを全て選び、記号で答えよう。

ア $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$　　イ $\begin{cases} -x+y=5 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$　　ウ $\begin{cases} -4x-5y=7 \\ \frac{x}{2}+\frac{4}{3}y=-3 \end{cases}$

$(x,y)=(2,-3)$ を代入して調べると、

アは、$x+y=-1$ は成り立つが、$2x+3y=8$ は成り立たない。

イは、$-x+y=5$ は成り立たないが、$3x-2y=12$ は成り立つ。

ウは、$-4x-5y=7$ も、$\frac{x}{2}+\frac{4}{3}y=-3$ も成り立つ。　以上より、**ウ**

代入して、２つの式が両方とも成り立つとき、その連立方程式の解。

連立方程式の解き方、代入法(だいにゅうほう)とは？

【要点】

(1) 連立方程式を解くには？　　　(2) 代入法とは？

(1) xやyを 1 文字消去する。

連立方程式を計算で解くにはどうすればいいでしょうか？1 次方程式では、文字が 1 つなので、計算で求めることができました。だから連立方程式でも、xやyを 1 文字消去して「文字を 1 つにする」ことができれば、計算できます。

xやyを 1 文字消去するには、「代入法」と「加減法」があります。ここでは代入法を勉強します。

(2) 文字の代わりに式を入れて、1 文字消去する。

$$\begin{cases} 3x-2y=5 & \cdots ① \\ y=2x-3 & \cdots ② \end{cases}$$

右の連立方程式を、代入法で解いてみましょう。

②より、$y=2x-3$ を①に代入して、

$3x-2(2x-3)=5$

$3x-4x+6=5$

$-x=-1$　より、$x=1$

これを②に代入して、$y=2\times1-3=2-3=-1$　以上より、$(x,y)=(1,-1)$

ここで答えでも OK ですが、最後に検算しておきましょう。

出てきた答えを、最後に使わなかった方の①の式に代入すると、

$3x-2y=3\times1-2\times(-1)=5$ となり、成り立ちます。

ので、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{1},-\mathbf{1})$で確実に正解とわかります。

【例題】

次の連立方程式を代入法で解こう。

(1) $\begin{cases} y=x-3 & \cdots ① \\ 2x-5y=9 & \cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -2x+5y=-15 & \cdots ① \\ x=-3y-9 & \cdots ② \end{cases}$

(1)

①より、$y=x-3$ を②に代入して、

$2x-5(x-3)=9$

$2x-5x+15=9$

$-3x=-6$　より、$x=2$

これを①に代入して、$y=2-3=-1$

以上より、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{2},-\mathbf{1})$

(2)

②より、$x=-3y-9$ を①に代入して、

$-2(-3y-9)+5y=-15$

$6y+18+5y=-15$

$11y=-33$　より、$y=-3$

これを②に代入して、$x=-3\times(-3)-9=0$

以上より、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{0},-\mathbf{3})$

連立方程式を解くには、「1 文字消去」です。1 文字消去の方法として、ここでは代入法を使います。シッカリ慣れておきましょう。答えが出たら、最後に使わなかった方の式で検算しましょう！

連立方程式の解き方、加減法（かげんほう）とは？その１

【要点】

(1) 連立方程式を解くには？　　(2) 加減法とは？

(1) xやyを１文字消去する。

連立方程式を計算で解くにはどうすればいいでしょうか？1次方程式では、文字が１つなので、計算で求めることができました。だから連立方程式でも、xやyを１文字消去して「文字を１つにする」ことができれば、計算できます。

xやyを１文字消去するには、「代入法」と「加減法」があります。ここでは加減法を勉強します。

(2) 式ごと足し算や引き算をすることで、１文字消去する。

$$\begin{cases} 2x + y = 6 & \cdots① \\ 2x - 3y = 22 & \cdots② \end{cases}$$

右の連立方程式を、加減法で解いてみましょう。どうすれば１文字消せるかを考えます。引き算すれば、xが消えますよね。

①－②より、

$$\begin{array}{rr} & 2x+y=6 \\ -) & 2x-3y=22 \\ \hline & 4y=-16 \\ & y=-4 \end{array}$$

$y = -4$ を①に代入して、

$2x + (-4) = 6$

$2x = 10$

$x = 5$　　以上より、$(x, y) = (5, -4)$

ここで答えでも OK ですが、最後に検算しておきましょう。

出てきた答えを、最後に使わなかった方の②の式に代入すると、

$2 \times 5 - 3 \times (-4) = 10 + 12 = 22$ となり、成り立ちます。

ので、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{5}, \mathbf{-4})$で確実に正解とわかります。

【例題】

次の連立方程式を加減法で解こう。

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 & \cdots ① \\ 5x - 3y = -19 & \cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x + 2y = -8 & \cdots ① \\ x - 4y = 14 & \cdots ② \end{cases}$

(1)

②－①より、$3x = -15$ なので、$x = -5$

これを①に代入して、

$2 \times (-5) - 3y = -4$

$-10 - 3y = -4$

$-3y = -4 + 10$

$-3y = 6$

$y = -2$

以上より、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{-5}, \mathbf{-2})$

(2)

①＋②より、$-2y = 6$ なので、$y = -3$

これを②に代入して、

$x - 4 \times (-3) = 14$

$x + 12 = 14$

$x = 14 - 12$

$x = 2$

以上より、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}, \mathbf{-3})$

連立方程式を解くには、「1文字消去」です。１文字消去の方法として、ここでは加減法を使います。シッカリ慣れておきましょう。答えが出たら、最後に使わなかった方の式で検算しましょう！

連立方程式の解き方、加減法とは？その２

【要点】

(1) 加減法で、最初の式で文字を消去できない場合は？

(1) かけ算をして、xやyの係数をそろえる。

$$\begin{cases} 2x + y = 6 & \cdots ① \\ 3x + 2y = 7 & \cdots ② \end{cases}$$

右の連立方程式を、加減法で解いてみましょう。どうすれば１文字消せるかを考えます。そのままでは消えません。こういう時は、かけ算をして、係数をそろえます。①を２倍すれば $2y$ となるので、引き算すれば、y を消せますよね。

①×2 より、$4x + 2y = 12 \quad \cdots$①'

①'−②より、

$$\begin{array}{rr} & 4x+2y=12 \\ -) & 3x+2y=7 \\ \hline & x=5 \end{array}$$

$x = 5$ を①に代入して、

$2 \times 5 + y = 6$

$10 + y = 6$

$y = -4$　　以上より、$(x, y) = (5, -4)$

ここで答えでも OK ですが、最後に検算しておきましょう。

出てきた答えを、最後に使わなかった方の②の式に代入すると、

$3 \times 5 + 2 \times (-4) = 15 - 8 = 7$ となり、成り立ちます。

ので、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{5}, -\mathbf{4})$で確実に正解とわかります。

【例題】

次の連立方程式を加減法で解こう。

(1) $\begin{cases} 3x + 4y = -23 & \cdots ① \\ -x + 3y = -1 & \cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x - 3y = 19 & \cdots ① \\ 3x + 5y = -9 & \cdots ② \end{cases}$

(1)

②×3 より、$-3x + 9y = -3 \quad \cdots$ ②'

①＋②'より、$13y = -26$ なので、$y = -2$

これを②に代入して、

$-x + 3 \times (-2) = -1$

$-x - 6 = -1$

$-x = -1 + 6$

$-x = 5$

$x = -5$

以上より、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-\mathbf{5}, -\mathbf{2})$

(2)

①×5 より、$25x - 15y = 95 \quad \cdots$ ①'

②×3 より、$9x + 15y = -27 \quad \cdots$ ②'

①'＋②'より、$34x = 68$ なので、$x = 2$

これを②に代入して、

$3 \times 2 + 5y = -9$

$6 + 5y = -9$

$5y = -9 - 6$

$5y = -15$

$y = -3$

以上より、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}, -\mathbf{3})$

連立方程式を解くには、「1 文字消去」です。1 文字消去の方法として、ここでは加減法を使います。シッカリ慣れておきましょう。答えが出たら、最後に使わなかった方の式で検算しましょう！

カッコがある連立方程式の解き方は？

【要点】

(1) カッコがある複雑(ふくざつ)な連立方程式を解くには？

(1) 整理して$◎x+□y=〜$ の形にすれば、いつも通り。

$$\begin{cases} 2(x-3y)-6x=6 & \cdots① \\ 3(x+2y)-2x-1=4y & \cdots② \end{cases}$$

右の連立方程式を、解いてみましょう。カッコがあって複雑ですよね。こういう時はまず、カッコをはずして、整理して$◎x+□y=〜$ の形にすれば、いつも通りになります。

①を整理すると、$2x-6y-6x=6$ なので、$-4x-6y=6$

両辺を 2 で割ると、$-2x-3y=3$ …①'

②を整理すると、$3x+6y-2x-4y=1$ なので、$x+2y=1$

両辺を 2 倍すると、$2x+4y=2$ …②'

①'+②'より、$y=5$

これを②を整理した形に代入して、$x+2\times5=1 \Leftrightarrow x=-9$

以上より、$(x,y)=(-9,5)$

ここで答えでも OK ですが、最後に検算しておきましょう。

出てきた答えを、最後に使わなかった方の①'の式に代入すると、

$-2\times(-9)-3\times5=18-15=3$ となり、成り立ちます。

ので、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathbf{-9},\mathbf{5})$で確実に正解とわかります。

【例題】

次の連立方程式を解こう。

(1) $\begin{cases} 4(x-y)-y=2 & \cdots ① \\ y=2x+2 & \cdots ② \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3(x+y)=18 & \cdots ① \\ 2x-(4y-1)=7 & \cdots ② \end{cases}$

(1)

①を整理すると、$4x-4y-y=2$ なので、

$4x-5y=2$ …①'

②を①'に代入して、

$4x-5(2x+2)=2$

$4x-10x-10=2$

$-6x=12$

$x=-2$

これを②に代入して、

$y=2\times(-2)+2=-4+2=-2$

以上より、$(x,y)=(\mathbf{-2},\mathbf{-2})$

(2)

①を整理すると、$x+y=6$ …①'

②を整理すると、$2x-4y+1=7$ なので、$2x-4y=6$

両辺を 2 で割ると、$x-2y=3$ …②'

①'−②'より、$3y=3$ なので、$y=1$

これを①'に代入して、$x+1=6 \Leftrightarrow x=5$

以上より、$(x,y)=(\mathbf{5},\mathbf{1})$

＊ 検算は、変形前の式でやりましょう。変形後の式だと、変形の時にミスしている可能性があるからです。
そしてもちろん、最後に使わなかった方の式で検算します。

小数や分数の連立方程式

【要点】

(1) 小数の連立方程式を解くには？　　(2) 分数の連立方程式を解くには？

(1) 両辺を 10 倍や 100 倍して整数にすれば、いつも通りになる。

(2) 整数になるように両辺を☆倍すれば、いつも通りになる。

【例題】

次の連立方程式を解こう。

(1) $\begin{cases} 0.2x - 0.3y = 1.3 & \cdots ① \\ 0.01x + 0.03y = -0.07 & \cdots ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 1 & \cdots ① \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{5}{6} & \cdots ② \end{cases}$

(1)

①×10 より、$2x - 3y = 13$　…①'

②×100 より、$x + 3y = -7$　…②'

①'+②'より、$3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

これを②'に代入して、

$2 + 3y = -7 \Leftrightarrow 3y = -9 \Leftrightarrow y = -3$

以上より、$(x, y) = (\mathbf{2}, \mathbf{-3})$

(2)

①×2 より、$2x - 3y = 2$　…①'

②×12 より、$4x + 3y = 10$　…②'

①'+②'より、$6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$

これを①'に代入して、

$2 \times 2 - 3y = 2 \Leftrightarrow 4 - 3y = 2 \Leftrightarrow -3y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$

以上より、$(x, y) = (\mathbf{2}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}})$

＊ 検算は、変形前の式でやりましょう。変形後の式だと、変形の時にミスしている可能性があるからです。
そしてもちろん、最後に使わなかった方の式で検算します。

$A = B = C$型の連立方程式

【要点】

(1) $A = B = C$型の連立方程式を解くには？

(1) 自分で好きに 2 つ選んで、いつもの形に持ち込む。

【例題】

次の連立方程式を解こう。

(1) $x - y = 3x - 6y = 3$　　(2) $2x + 3y = 3x + 2 = 5y + 4$

(1)

連立方程式の形にすると、$\begin{cases} x - y = 3 & \cdots ① \\ 3x - 6y = 3 & \cdots ② \end{cases}$

②÷3 より、$x - 2y = 1$　…②'

①−②'より、$y = 2$

これを①に代入して、$x - 2 = 3$ なので、$x = 5$

以上より、$(x, y) = (\mathbf{5}, \mathbf{2})$

(2)

連立方程式の形にすると、$\begin{cases} 2x + 3y = 5y + 4 & \cdots ① \\ 3x + 2 = 5y + 4 & \cdots ② \end{cases}$

①を整理して、$2x - 2y = 4$

両辺を 2 で割って、$x - y = 2$ … ①'

②を整理して、$3x - 5y = 2$ … ②'

①'×3 より、$3x - 3y = 6$ … ①''

①''−②'より、$2y = 4$ なので、$y = 2$

これを①'に代入して、$x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$

以上より、$(x, y) = (\mathbf{4}, \mathbf{2})$

＊ もちろん上の解答以外の組み合わせで求めても OK です。色々な解き方があります