中３　教 p24～41　因数分解と式の利用

素数とは？

【要点】

(1) 素数って、何？　　　(2) 1 は素数？

(1) 「約数が、1 とその数自身だけ」の数のこと。

　数学では、「素数」という大切な考え方があります。素数を理解するためには、まず「約数」を思い出す必要があります。約数とは、「その数を、割り切れる数」のことでしたよね。例えば「12 の約数」は、「1, 2, 3, 4, 6, 12」です。これらは 12 を割り切ることができます。それが約数です。

　さて、話を「素数」に戻します。素数とは、「約数が、1 とその数自身だけ」の数のことです。例えば、「2 は素数」です。「2 の約数は、1 と 2 だけ」だからです。じゃあ、3 は素数でしょうか？素数です。「3 の約数は、1 と 3 だけ」だからです。では、4 は素数でしょうか？違いますよね。「4 の約数は、1, 2, 4」と 3 つあるからです。こう考えると、「素数とは、約数が 2 個だけの数」ともいえますね。

(2) 1 は素数じゃない。

　1 つ注意点があります。「1 は、素数じゃない」ということです。「1 の約数は 1、1 つだけ」ですもんね。

【例題】

1 から 30 までの素数を答えよう。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

　「素数とは何か？」ということを思い出しましょう。そう考えると、「偶数で素数になるのは、2 だけ」ですよね。「偶数は全て 2×☆と表すことができ、必ず約数に 2 が含まれるから」です。

　あとは奇数だけチェックしていきます。かけ算を考えると、約数を見つけやすいです。

9	15	21	25	27
1×9 3×3	1×15 3×5	1×21 3×7	1×25 5×5	1×27 3×9

　9, 15, 21, 25, 27, これらの奇数は、「約数が 2 個だけじゃない」ですよね。だから素数ではありません。

素因数分解とは？

【要点】

(1) 素因数分解って、何？　　　(2) 素因数分解のコツは？

(1) ある自然数を、素数だけのかけ算の形で表すこと。

　ある自然数を、素数だけのかけ算の形に表すことを「素因数分解」といいます。(例) $6 = 2 \times 3$ という感じです。これを、$6 = 1 \times 6$ としても、素因数分解したことにはなりません。1 も 6 も素数じゃないからです。素数だけのかけ算で表す。それが素因数分解です。

(2) 筆算の逆の形で、素数だけで割り続ける

　素因数分解をするには、コツがあります。それは「筆算の逆の形で、素数だけで割り続けること」です。

(例)

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

```
2 ) 8     2 ) 12    2 ) 90
2 ) 4     2 ) 6     3 ) 45
    2         3     3 ) 15
                         5
```

【例題】

次の数を素因数分解しよう。　(1) 10　(2) 27　(3) 100　(4) 540

(1) 2×5　(2) 3^3　(3) $2^2\times5^2$　(4) $2^2\times3^3\times5$

素数だけのかけ算の形に表します。困ったら「筆算の逆の形で、素数だけで割り続ける」方法が有効です。

ある自然数の 2 乗にするには？

【要点】

(1) できるだけ小さい自然数をかけて、ある自然数の 2 乗にするには？

(1) 素因数分解をして、同じ形になるように配る。足りないものが答え。

「12 にできるだけ小さい自然数をかけて、ある自然数の 2 乗にする。」というような問題が、ちょいちょい出てきます。どうすればいいでしょうか？イメージは、「太郎と花子がケンカしないように、お菓子を平等に配る」感じです。

まず 12 を素因数分解します。$12 = 2^2 \times 3$ ですよね。

「2 が 2 個, 3 が 1 個」あります。

「ある自然数の 2 乗にしたい」ということは、

「(同じ数) × (同じ数) の形にしたい」

ということです。そこで、

「2 が 2 個, 3 が 1 個」を、それぞれのカッコに配ります。

すると、「同じ形にするには、3 が足りない」ですよね。

ということは、「3 があれば、同じ形になる」ということです。

ですから、3 をかければいいことがわかります。

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$(2 \times 3) \times (2 \times \square)$$

同じ形にするには、何が必要？

実際、12 に 3 をかければ、$12 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ となり、これは $(2 \times 3)^2$ と変形でき、6^2 になってくれます。

【例題】

(1) 75 にできるだけ小さい自然数をかけて、ある自然数の 2 乗にしたい。どんな数をかければいいか？

(2) 60 にできるだけ小さい自然数をかけて、ある自然数の 2 乗にしたい。どんな数をかければいいか？

(1) 75 を素因数分解すると、$75 = 3 \times 5^2$ となる。

この両辺に 3 をかければ、$75 \times 3 = 3^2 \times 5^2$ となり、

これは $(3 \times 5)^2$ と変形できる。よって **3 をかければよい。**

$$75 = 3 \times 5 \times 5$$

$$(3 \times 5) \times (5 \times \square)$$

同じにするには、何が必要？

(2) 60 を素因数分解すると、$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ となる。

この両辺に 3×5 をかければ、$60 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ となり、

これは $(2 \times 3 \times 5)^2$ と変形できる。よって **15 をかければよい。**

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$(2 \times 3 \times 5) \times (2 \times \square)$$

同じにするには、何が必要？

「2 人がケンカしないように、お菓子を平等に配る」イメージです。

共通因数をくくる因数分解とは？

【要点】

(1) 因数分解って何？　　(2) 因数分解の基本は？

(1) かけ算の形に表すこと。展開の反対。

ある数や多項式を、かけ算の形で表すことを因数分解するといいます。
そして、そのかけ算を作っているそれぞれを「因数」といいます。
因数分解は、これまでやってきた「展開」の反対みたいなもんです。

(ある数や式)＝(☆)×(△)
因数　因数

(2) まず共通な因数でくくれるか？

因数分解の第一歩目は、「分配法則の逆」です。分配法則とは、$a(b+c)=ab+ac$ のことでした。反対から言えば、$ab+ac=a(b+c)$ とできる、ということです。これも立派な因数分解です。
$ab+ac$ 両方に共通する a に注目して、$a(\quad)$の形にする。これを「共通な因数 a でくくる」といいます。
あとは「分配法則をしたときに、中に何があったら元に戻るかな？」を考えます。それでカッコの中身がわかります。

(例 1) $8x+10y=2(4x+5y)$

＊ 共通な因数は 2 だから、2(　)の形にする。あとは展開を想像して中身が決まる。

(例 2) $x^2-xy=x(x-y)$

＊ 共通な因数は x だから、$x(\quad)$の形にする。あとは展開を想像して中身が決まる。

(例 3) $3a^2b-6ab^2=3ab(a-2b)$

＊ 共通な因数は $3ab$ だから、$3ab(\quad)$の形にする。あとは展開を想像して中身が決まる。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $5a-20b$　(2) $30xy-18zx$　(3) $21a^2-14ab+7a$　(4) $16x^2yz+24xy^2z$

(1) $5(a-4b)$　＊ 共通な因数は 5 だから、5(　)の形にする。あとは展開を想像して中身が決まる。

(2) $6x(5y-3z)$　＊ 共通な因数は $6x$ だから、$6x(\quad)$の形。あとは展開の想像で中身が決定。

(3) $7a(3a-2b+1)$　＊ 共通因数は $7a$ だから、$7a(\quad)$の形。あとは展開の想像で中身が決定。

(4) $8xyz(2x+3y)$　＊ 共通因数は $8xyz$ だから、$8xyz(\quad)$の形。あとは展開の想像で中身が決定。

まず文字や数字で共通なものを見つけます。展開を想像して、「元の形に戻るか？」確かめましょう。

⇒ 練習プリント p13

公式による因数分解とは？その１

【要点】

(1) x^2+5x+6 の因数分解の考え方は？　　(2) x^2-5x-6 の因数分解は？

(1) 「かけて 6, たして 5 になる組み合わせ」を考える。検算で元の式に戻るか確認。 答えは $(x+2)(x+3)$

因数分解とは、かけ算の形に表すことでした。展開の反対みたいなもんです。つまり「x^2+5x+6 を因数分解する」というのは、「$(x+?)(x+?)$ を展開して、x^2+5x+6 にするには、？に何が入ればいいか」を考えるということです。じゃあ、どうすれば？に入る数字、見つかるでしょうか。

コツがあります。「かけて 6、たして 5 になる組み合わせを考える」ことです。なぜか？

$(x+a)(x+b)$ を展開すると、$x^2+(a+b)x+ab$ となるからです。

そして、たし算の組み合わせはいっぱいありますが、

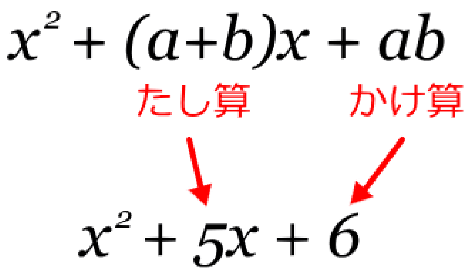
かけ算の組み合わせは限られています。

だから「最初にかけて 6」になる組み合わせを考えます。

「1 と 6」、「2 と 3」が見つかりますよね。

あと「−1 と−6」、「−2 と−3」の可能性もあります。

この中から、「たして 5 になる」組み合わせを見つけます。



「2 と 3」ですよね。だから、$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ と因数分解できます。

検算してみましょう。答えと思った $(x+2)(x+3)$ を展開します。

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ ですよね。だから因数分解が合っていることがわかります。このように因数分解では、「展開して元の式に戻るか検算する」ことも大切です。

(2) $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

「かけて−6、たして−5 になる組み合わせ」を考えます。かけ算の組み合わせは限られているので、「最初にかけて−6 の組み合わせ」を考えます。「1 と−6」「2 と−3」「3 と−2」「6 と−1」ですよね。この中から「たして−5 になる」のは、「1 と−6」です。だから、$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$ です。

検算も忘れないようにしましょう。答えと思った $(x-6)(x+1)$ を展開します。

$(x-6)(x+1)=x^2-5x-6$ と元に戻りますね。ですからこれが答えです。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) x^2+6x+8　　(2) $x^2+3x-10$　　(3) $x^2-7x+12$　　(4) $x^2-15xy-16y^2$

(1) $(x+2)(x+4)$　　＊ かけて 8、たして 6 になる組み合わせ

(2) $(x+5)(x-2)$　　＊ かけて−10、たして+3 になる組み合わせ

(3) $(x-3)(x-4)$　＊ かけて 12、たして−7 になる組み合わせ

(4) $(x-16y)(x+y)$

＊ かけて$-16y^2$なので、「$-y$と$16y$」「$-2y$と$8y$」「$-4y$と$4y$」「$-8y$と$2y$」「$-16y$とy」がある。

この中から「たして$-15xy$」になる組み合わせ。

まずかけ算、それからたし算を考えて組み合わせを見つけます。見つけた後は、展開を想像して、「元の形に戻るか？」確かめましょう。

公式による因数分解とは？その２

【要点】

(1) x^2+6x+9 の因数分解の考え方は？　　(2) $x^2-8x+16$ の因数分解の考え方は？

(3) $4a^2+20ab+25b^2$ の因数分解は？

(1) 「両端が２乗」なので「２乗２倍２乗の形」と思う。あとは真ん中の検算。答えは $(x+3)^2$

因数分解とは、かけ算の形に表すことでした。展開の反対みたいなもんです。つまり「x^2+6x+9 を因数分解する」というのは、「展開して、x^2+6x+9 になるのは？」を考えるということです。

ここで思い出したいのが、２乗の展開公式です。

(前＋後)^2 = 前^2 ＋２×前×後＋後^2　でしたよね。

つまり、「何かの２乗」があるときは、この公式の可能性が高いです。

x^2+6x+9 において、「x^2 は、x の２乗」、「9 は、３の２乗」です。

$$\underbrace{☆^2}_{2乗}+\underbrace{2\times☆\times\triangle}_{2倍}+\underbrace{\triangle^2}_{2乗}=(☆+\triangle)^2$$

だから「$(x+3)^2$ の可能性がある な」とわかります。

あとは検算です。$(x+3)^2$ を展開して、シッカリx^2+6x+9に戻れば正解です。実際に検算するとき、両端(りょうはし)の x^2 と９が出てくるのは、わかりきっています。ので、「真ん中の $6x$ になるか？」に注目します。「２乗の展開公式の真ん中は、前×後の２倍」なので、「$x\times3$ の２倍」を確認します。ちゃんと$6x$ になりますよね。だから x^2+6x+9 は$(x+3)^2$に因数分解できることがわかります。

(2)「両端が２乗」、真ん中マイナスの「２乗２倍２乗の形」と思う。あとは真ん中の検算。答え $(x-4)^2$

(1)とほぼ同じですが、違いは「真ん中が−8」とマイナスがあることです。そして「16 は、４の２乗」ということから、「$(x-4)^2$ の可能性がある な」とわかります。あとは検算です。「真ん中の$-8x$ になるか？」に注目します。「２乗の展開公式の真ん中は、前×後の２倍」なので、「$x\times(-4)$ の２倍」を確認します。ちゃんと$-8x$ になりますよね。だから $x^2-8x+16$ は$(x-4)^2$に因数分解できることがわかります。

(3) $4a^2+20ab+25b^2=(2a+5b)^2$

一見(いっけん)ややこしそうですが、考え方は同じです。「$4a^2$は$2a$の２乗」、「$25b^2$は $5b$の２乗」なので、「２乗２倍２乗の形」で、答えは$(2a+5b)^2$の可能性が高いです。あとは真ん中の検算です。「前×後の２倍が、真ん中に合うか？」を確認します。$2a\times5b$ の２倍は、$20ab$ なので、真ん中の数に合っています。よって$(2a+5b)^2$が答えで OK とわかります。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $x^2+16x+64$　　(2) $x^2-18x+81$　　(3) $9a^2+42ab+49b^2$　　(4) $36x^2-60xy+25y^2$

(1) $(x+8)^2$　　＊　「64 は８の２乗」なので、$(x+8)^2$かな？と思う。あとは真ん中の検算。

(2) $(x-9)^2$

＊　「81 は９の２乗」で、真ん中にマイナスあるので、$(x-9)^2$かな？と思う。あとは真ん中の検算。

(3) $(3a+7b)^2$

＊　「$9a^2$は$3a$の２乗」、「$49b^2$は$7b$の２乗」なので、$(3a+7b)^2$かな？と思う。あとは真ん中の検算。

(4) $(6x-5y)^2$

＊　「$36x^2$は$6x$の２乗」、「$25y^2$は$5y$の２乗」で、真ん中にマイナスあるので$(6x-5y)^2$かな？から検算。

両端に２乗があるときは、「２乗２倍２乗の形」の因数分解の可能性が高いです。あとは、前×後の２倍が真ん中の数に合うかシッカリ確認しましょう。

公式による因数分解とは？その３

【要点】

(1) x^2-9 の因数分解の考え方は？　　(2) $4x^2-25y^2$ の因数分解は？

(1) 「２乗−２乗の形」になっている。$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$と因数分解。答えは $(x+3)(x-3)$

因数分解とは、かけ算の形に表すことでした。展開の反対みたいなもんです。つまり「x^2-9 を因数分解する」というのは、「展開して、x^2-9 になるのは？」を考えるということです。

ここで思い出したいのが、次の展開公式です。

$(前+後)(前-後)=前^2-後^2$　でしたよね。

つまり「２乗−２乗の形」のときは、この公式です。

x^2-9 において、「x^2 は、x の２乗」、「9 は、３の２乗」です。

だから $(x+3)(x-3)$ と因数分解できます。

$\underbrace{☆^2}_{2乗} - \underbrace{△^2}_{2乗}$

$= (☆ + △)(☆ - △)$

(2) $4x^2-25y^2=(2x+5y)(2x-5y)$

$4x^2-25y^2$において、「$4x^2$ は、$2x$ の２乗」、「$25y^2$ は、$5y$ の２乗」なので、「２乗−２乗の形」です。だから $(2x+5y)(2x-5y)$ と因数分解できます。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) x^2-64　　(2) $9x^2-49y^2$　　(3) $-36x^2+25y^2$

(1) $(x+8)(x-8)$　　(2) $(3x+7y)(3x-7y)$　　(3) $(5y+6x)(5y-6x)$

「２乗−２乗の形」に気付けば、一発で答えが出ます。(3)は、$-36x^2+25y^2=25y^2-36x^2$ と並び変えることがポイントです。因数分解では、念のための検算を忘れないようにしましょう。

⇒ 練習プリント p15

因数分解のまとめ

【要点】

(1) 因数分解の基本は？　　(2) $2x^2+12x+16$の因数分解は？

(1) まずくくれるか？その後、カッコの中身で公式利用。

今後、高校でも因数分解はずっと出てきます。因数分解で考えることは、「まずくくれるか？」です。その後に公式の利用を考えます。「くくった後に、カッコの中身で公式利用」もよくあります。

- くくる … $8x+10y=2(4x+5y)$
- 公式(足し算とかけ算) … $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$
- 公式(2 乗、2 倍、2 乗) … $4a^2+20ab+25b^2=(2a+5b)^2$
- 公式(2 乗－2 乗) … $4x^2-25y^2=(2x+5y)(2x-5y)$

(2) $2x^2+12x+16=2(x^2+6x+8)=2(x+2)(x+4)$

因数分解の基本は、まずくくれるか？です。2 でくくれますね。くくった後はカッコの中身に注目します。たいてい公式を利用した因数分解が続きます。今回は、「かけて 8、たして 6 になる組み合わせ」ですね。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $3x^2+18x+27$　(2) $4ax^2-20axy+25ay^2$　(3) $72xa^2-50xb^2$　(4) $5ax^2-25axy+30ay^2$

(1)	(2)	(3)	(4)
$3x^2+18x+27$ $=3(x^2+6x+9)$ $=\mathbf{3(x+3)^2}$	$4ax^2-20axy+25ay^2$ $=a(4x^2-20xy+25y^2)$ $=\mathbf{a(2x-5y)^2}$	$72xa^2-50xb^2$ $=2x(36a^2-25b^2)$ $=\mathbf{2x(6a+5b)(6a-5b)}$	$5ax^2-25axy+30ay^2$ $=5a(x^2-5xy+6y^2)$ $=\mathbf{5a(x-2y)(x-3y)}$

置き換え利用の因数分解とは？

【要点】

(1) $(x+2)^2-3(x+2)-4$ の因数分解の考え方は？

(1) 同じ組み合わせがあるので置き換える。答えは$(x-2)(x+3)$

この例のように、同じ組み合わせがある因数分解は、「置き換えを利用」すると楽チンになります。

$x+2=A$ と置き換えてみましょう。A^2-3A-4 となりますよね。これを因数分解すると、$(A-4)(A+1)$ です。でも A は僕たちが勝手に置いた文字なので、元に戻してあげます。$(x+2-4)(x+2+1)$ となります。後はカッコの中を整理して、$(x-2)(x+3)$ が答えです。

$(x+2)^2-3(x+2)-4$

置き換え

$=A^2-3A-4$

ちなみに、置き換えなくても「まず展開」する方法でも解くことはできます。

$(x+2)^2-3(x+2)-4=x^2+4x+4-3x-6-4=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

でも置き換えは重要な考え方なので、練習して慣れておきましょう。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $(x-1)^2+2(x-1)-8$　(2) $x(2y-3)+4(2y-3)$

(1)	(2)
$x-1=A$ とすると、 $A^2+2A-8=(A+4)(A-2)$ A を元に戻して、 $(x-1+4)(x-1-2)=\mathbf{(x+3)(x-3)}$	$2y-3=A$ とすると、$xA+4A$ これを因数分解して、$A(x+4)$ A を元に戻して、$(2y-3)(x+4)=\mathbf{(x+4)(2y-3)}$ ＊ $(2y-3)(x+4)$ でも正解。

$xy-x+y-1$ 型の因数分解は？

【要点】

(1) $xy-x+y-1$ の因数分解の考え方は？

(1) 一部分をくくれば、置き換えられる。答えは $(x+1)(y-1)$

因数分解の基本は、「まずくくれるか？」です。でもこの例のように、全体をくくることもできないし、公式利用もできない場合があります。どうすればいいでしょうか？

実は、一部分をくくり出せば、うまくいきます。$xy-x+y-1$ の前半部分 $xy-x$ に注目します。ここだけなら、x でくくれますよね。すると、$(y-1)$ が前半にも後半にも出てきます。こうなれば置き換えられますよね。$y-1=A$ とすると、$xA+A$ です。A でくくれば $A(x+1)$。A を元に戻して $(y-1)(x+1)$。ここで答えでもいいですが、見映えを考えて $(x+1)(y-1)$。このようにして因数分解が完成します。

$$\underline{xy-x}+y-1$$

前半部分だけでくくる

$$=\underline{x(y-1)}+(y-1)$$

$$=xA+A$$

別解もあります。それは、「$xy-x+y-1$ 型の因数分解は、$(x+▲)(y+△)$ の形にできる！」とわかっておいて、展開を想像するという方法です。「$(x+▲)(y+△)$ を展開して、$xy-x+y-1$ にするには、何が入ればいいかな？」を考えます。そうすれば、$(x+1)(y-1)$ と因数分解できることが、わかります。ただ、毎回使えるわけではないので、「一部分をくくって置き換え」の方法は、いずれにせよシッカリ押さえておく必要があります。

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $ab-2a+2b-4$　　(2) $2xy-5y-2x+5$

(1)	(2)
$ab-2a+2b-4 \;=a(b-2)+2(b-2)$ $b-2=A$ とすると、$aA+2A=A(a+2)$ A を元に戻して、$(b-2)(a+2)=\boldsymbol{(a+2)(b-2)}$ ＊ $(b-2)(a+2)$ でも正解	$2xy-5y-2x+5\;=y(2x-5)-(2x-5)$ $2x-5=A$ とすると、$yA-A=A(y-1)$ A を元に戻して、$\boldsymbol{(2x-5)(y-1)}$

$x^2+2xy+y^2-1$ 型の因数分解は？

【要点】

(1) $x^2+2xy+y^2-1$ 型の因数分解の考え方は？

(1) 「2 乗 2 倍 2 乗の形」から置き換える。答えは$(x+y+1)(x+y-1)$

因数分解の基本は、「まずくくれるか？」です。でも今回も、全体をくくることもできないし、公式利用もできない。前回のように「一部分をくくる」でも、うまくいきません。どうすればいいでしょうか？

実は、「2 乗 2 倍 2 乗の形」の因数分解を利用すれば、うまくいきます。

$x^2+2xy+y^2-1$ の前３つに注目すると､｢2 乗２倍２乗の形｣なので $(x+y)^2$ と因数分解できます。そして $x+y=A$ と置き換えれば、見やすくなります。

A^2-1 となりますね。今度は、「2 乗－2 乗の形」の因数分解です。

$(A+1)(A-1)$ となりますね。あとは A を元に戻して、$(x+y+1)(x+y-1)$ で完成です。

こんなもん普通の人は初めて見たとき、できません笑　慣れが必要ですね！

$$x^2+2xy+y^2-1$$

↓ 2乗2倍2乗の形

$$=(x+y)^2-1$$

↓ 置き換え

$$=A^2-1$$

【例題】

次の式を因数分解しよう。

(1) $a^2-2ab+b^2-36$　　(2) $25x^2+40xy+16y^2-9z^2$

(1)

$a^2-2ab+b^2-36=(a-b)^2-36$

$a-b=A$ とすると、$A^2-36=(A+6)(A-6)$

A を元に戻して、$\boldsymbol{(a-b+6)(a-b-6)}$

(2)

$25x^2+40xy+16y^2-9z^2=(5x+4y)^2-9z^2$

$5x+4y=A$ とすると、$A^2-9z^2=(A+3z)(A-3z)$

A を元に戻して、$\boldsymbol{(5x+4y+3z)(5x+4y-3z)}$

復習: 倍数を文字で表すには？

【要点】

(1) 3 の倍数を文字で表すと？　(2) 5 の倍数を文字で表すと？　(3) 3 の倍数になることを示すには？

(1) $3n$ (n は整数)

3 の倍数ということは、「3×☆」ですよね。この☆の部分を文字にするだけです。ただ 1 つ注意点があります。この☆の部分は、整数じゃないとダメです。$\frac{1}{3}$ など分数が入っちゃうと、3 の倍数にならない場合もあるからです。使う文字は、 a でも x でも何でもいいですが、整数を表すときは n が多いです。

また 2 つの数を表すには、2 つの文字を使う必要があります。このときは m と n を使うことが多いです。

(2) $5n$ (nは整数)

5 の倍数ということは、5×☆です。やはり整数であることをシッカリ言う必要があります。

(3) 3×(整数)の形を見せて、カッコの中身が整数であることを明記する。

「3 の倍数になることを示す」場合も、「3×(整数)の形」になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

7 の倍数どうしの和は、7 の倍数になる。このことを文字で説明しよう。

2 つの 7 の倍数は、$7m,\ 7n$ ($m,\ n$は整数)と表せる。

この 2 数の和は、$7m+7n=7(m+n)$　分配法則の逆

ここで$m+n$は整数なので、$7(m+n)$は 7 の倍数である。よって、7 の倍数どうしの和は、7 の倍数になる。

2 つの数を表すので、文字は 2 つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数で

あることを、シッカリ書きましょう。また 7 の倍数であることを示すために、7×(整数)となるように式変形しますが、そのときに「分配法則の逆」を使うことも大切です。

復習: 連続(れんぞく)する整数を文字で表すには？

【要点】

(1) 連続する 2 つの整数を文字で表すと？　　(2) 連続する 3 つの整数を文字で表すと？

(1) $n,\ n+1$ (n は整数)

連続する 2 つの整数とは、「3 と 4」や、「17 と 18」のことです。「後ろの数は、前の数に＋1 したもの」ですよね。だから前の数を n などの文字でおけば、後ろの数はそれに＋1 した、 $n+1$ となります。
連続する数を表す場合は、文字は 1 つで表すことができます。

(2) $n-1,\ n,\ n+1$ (n は整数)

連続する 3 つの整数とは、「3 と 4 と 5」や、「17 と 18 と 19」のことです。やはり「次の数は前の数に＋1 したもの」です。だから先頭の数を n などの文字でおけば、次の数は＋1 した $n+1$、さらに次の数は＋1 して $n+2$ です。そう考えると、連続 3 整数は「$n,\ n+1,\ n+2$」と表せます。これでも OK です。
でも、もっと良い方法があります。それは、真ん中の数を n などの文字でおくことです。そうすれば「先頭の数は、真ん中を－1 した $n-1$。最後の数は、真ん中を＋1 した $n+1$」となります。連続 3 整数は、「$n-1,\ n,\ n+1$」とおく。この表し方の方が、計算がスッキリすることが多いです。

【例題】

連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる。このことを文字で説明しよう。

連続する 3 つの整数を、$n-1,\ n,\ n+1$ (nは整数)とする。
この 3 数の和は、$(n-1)+n+(n+1)=3n$
ここでnは整数なので、$3n$は 3 の倍数である。よって、連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる。

連続する整数の文字のおきかたに慣れましょう。また 3 の倍数を表すために n が整数であることを、シッカリ書きましょう。

復習: 偶数(ぐうすう)を文字で表すには？

【要点】

(1) 偶数を文字で表すと？　　(2) 偶数であることを示すには？

(1) $2n$ (n は整数)

偶数とは、「2, 4, 6, 8, 10, …」。つまり、2 の倍数のことです。だから 2×☆です。もちろん使う文字は、a でも x でも何でもいいですが、整数を表すときは n が多いです。
また 2 つの数を表すには、2 つの文字を使う必要があります。このときは m と n を使うことが多いです。

(2) 2×(整数)の形を見せて、カッコの中が整数であることを明記する。

偶数であることを示すには、2×(整数)の形になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

2 つの偶数の和は偶数になることを、文字を使って説明しよう。

2 つの偶数は、$2m,\ 2n$ (m, n は整数)と表せる。
この 2 数の和は、$2m+2n=2(m+n)$　分配法則の逆
$m+n$は整数なので、$2(m+n)$ は偶数である。よって、2 つの偶数の和は偶数になる。

2つの数を表すので、文字は2つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また、偶数であることを示すために、2×(整数)となるように式変形しますが、そのときに「分配法則の逆」を使うことも大切です。

復習: 奇数(きすう)を文字で表すには？

【要点】

(1) 奇数を文字で表すと？　　(2) 奇数であることを示すには？

(1) $2n-1$ (n は整数) もしくは $2n+1$ (n は整数)

奇数とは、「1, 3, 5, 7, 9, …」ですね。これは「偶数から1を引いたもの」です。なので、2×☆−1で奇数を表せます。もしくは「偶数に1を足したもの」という見方もできます。この場合は2×☆+1です。どちらでもOKです。

(2) 2×(整数)−1 もしくは 2×(整数)+1 の形を見せて、カッコの中が整数であることを明記する。

奇数であることを示すには、2×(整数)−1や2×(整数)+1の形になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

偶数と奇数の和は奇数になることを、文字を使って説明しよう。

偶数と奇数は、$2m,\ 2n-1$ (m, n は整数)と表せる。

この2数の和は、$2m+(2n-1)=2m+2n-1$

$=2(m+n)-1$

$2m+2n$の部分だけで分配法則の逆

$m+n$は整数なので、$2(m+n)-1$ は奇数である。以上より、偶数と奇数の和は奇数になる。

2つの数を表すので、文字は2つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また、奇数であることを示すために、2×(整数)−1となるように式変形しますが、そのときに「$2m+2n$の部分だけで分配法則の逆」を使うことがポイントです。

復習: 連続する２つの偶数(奇数)を文字で表すには？

【要点】

(1) 連続する２つの偶数を文字で表すと？　　(2) 連続する２つの奇数を文字で表すと？

(1) $2n,\ 2n+2$ (n は整数)

連続する２つの偶数とは、「6 と 8」や「12 と 14」などのことです。大切なことは、「前の数が決まれば、後ろの数は自動で決まる」ということです。「後ろの偶数は、前の偶数に＋2 したもの」ですよね。だから前の偶数を $2n$ などの文字でおけば、後ろの数はそれに＋2 した、 $2n+2$ となります。

連続する数を表す場合は、文字は１つで表すことができます。

(2) $2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)

連続する２つの奇数とは、「5 と 7」や「13 と 15」などのことです。これも大切なことは、「後ろの奇数は、前の奇数に＋2 したもの」ですよね。だから前の奇数を $2n-1$ などの文字でおけば、後ろの数はそれに＋2 した、 $2n+1$ となります。

もしも前の奇数を $2n+1$ とおけば、後ろの数は＋2 した $2n+3$ になりますが、「$2n+1,\ 2n+3$」とおくより、「$2n-1,\ 2n+1$」の方が計算が楽になることが多いです。

【例題】

次の計算は、偶数になるか？奇数になるか？文字を使って判断しよう。

(1) 連続する２つの偶数の和　　(2) 連続する２つの奇数の和

(1) 連続する２つの偶数は、$2n,\ 2n+2$ (n は整数)と表せる。

この２数の和は、$2n+(2n+2)=4n+2=2(n+1)$

$n+1$ は整数なので、$2(n+1)$ は偶数である。以上より、連続する２つの偶数の和は偶数になる。

連続する２つの偶数は、$2n,\ 2n+2$ (n は整数)と表せます。「和」なので足し算して、「偶数を表す形か？奇数を表す形か？」見極(みきわ)めます。途中(とちゅう)で「分配法則の逆」を使うのも、ポイントです。

(2) 連続する２つの奇数は、$2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)と表せる。

この２数の和は、$(2n-1)+(2n+1)=4n$

n は整数なので、$4n$ は偶数である。以上より、連続する２つの奇数の和は偶数になる。

連続する２つの奇数は、$2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)と表せます。「和」なので足し算して、「偶数を表す形か？奇数を表す形か？」見極(みきわ)めます。$4n$ は４の倍数「4, 8, 12, …」のことなので、偶数です。

式を利用して数の性質を証明するには？

【要点】

(1) 式を利用して数の性質を証明するには？

(1) 文字のおき方をシッカリとおさえておき、文章通りに式を作る。

ここは苦手を感じる人が多いテーマですが、それは「文字のおき方が明確になっていないから」です。文字のおき方さえ押さえられていたら、あとは文章通りに式を作るだけです。慣れが大切なところなので、いっぱい練習して、慣れていきましょう！

【例題】

次のことを証明しよう。

(1) 連続する 2 つの整数の 2 乗の差は、その 2 数の和と等しい。

(2) 2 つの奇数の 2 乗の和は、偶数になる。

(1) 連続する 2 つの整数は、$n, n+1$(nは整数)とおける。

連続する 2 つの整数の 2 乗の差は、 $(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1$ … ①

また連続する 2 つの整数の和は、$n+(n+1)=2n+1$ … ②

①, ②より、連続する 2 つの整数の 2 乗の差は、その 2 数の和と等しいといえる。

連続する 2 つの整数は、n, $n+1$ (n は整数)と表せます。その 2 数の「2 乗の差」と「和」が等しいことを証明したいので、「2 乗の差を計算すれば、どうなるか？」を式にして計算で見せる。「和がどうなるか？」も式にして計算して見せる。同じ形になることを示せば OK です。

(2) 2 つの奇数は$2m+1, 2n+1$(m, nは整数)とおける。この 2 つの奇数の 2 乗の和は、

$$(2m+1)^2+(2n+1)^2=(4m^2+4m+1)+(4n^2+4n+1)$$
$$=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1=4m^2+4m+4n^2+4n+2$$
$$=2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)$$

$2m^2+2m+2n^2+2n+1$は整数なので、$2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)$は偶数である。

以上より、2 つの奇数の 2 乗の和は、偶数になる。

2 つの奇数は、$2m+1, 2n+1$ (n は整数)と表せます。「2 乗の和」と言われているので、その通りに式を作ります。偶数になることを示すので、「2×(整数)」の形になることを、目指します。

図形の面積を文字で表すには？

【要点】

(1) 図形の面積を文字で表すには？

(1) 図を描いて、具体例などから式を導き出す。

文字を使って式に表すことで、色々なメリットがあります。「どんなメリットがあるか？」は後でわかるので、とりあえず練習して慣れておきましょう。

イキナリ文字で考えるのが難しければ、「3 ならどうだろう？」「10 ならどうなるだろう？」と具体例を考えれば、式が見えてきます。

【例題】

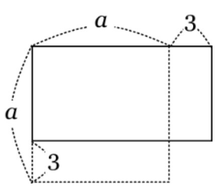
1 辺が a cm の正方形で、横の長さを 3cm 長くし、縦の長さを 3cm 短くすると、面積はもとの正方形と比べてどうなるか？

もとの正方形の面積は、$a \times a=a^2$

長さを変えたあとの面積は、$(a+3)(a-3)=a^2-9$

よって、$(a^2-9)-a^2=-9$

以上より、**9 cm^2**小さくなる



図を描いて、具体例などを考えることで、頑張って文字を使った式にすることが大切です。

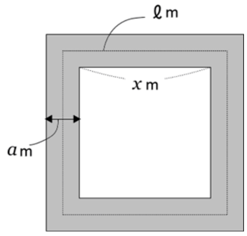
道の面積の証明問題は？

【要点】

(1) 右図で道の面積は？

(2) 右図で道のど真ん中の長さℓは？

(3) 右図で、「道の面積」と「道幅×道のど真ん中の長さℓ」が等しくなることを確認しよう。



(1) $(x+2a)^2-x^2=x^2+4ax+4a^2-x^2=\mathbf{4ax+4a^2}$

道の面積は、大きい正方形から小さい正方形を引き算すれば求められる。大きい正方形の一辺の長さは、$x+2a$になるところがポイント。

(2) $(x+a)\times 4=\mathbf{4x+4a}$

道のど真ん中の長さの一辺は、「小さい正方形の一辺に道幅を足したもの」と等しくなります。$\frac{a}{2}$が2コ分だけ長くなるからです。つまり一辺が$x+a$になり、ℓは周りの長さ(4辺の長さ)なので、4倍です。

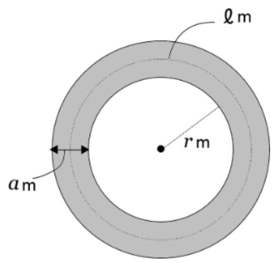
(3) 道の面積は(1)より$4ax+4a^2$であり、道幅×道のど真ん中の長さℓは(2)より$a\times(4x+4a)=4ax+4a^2$

よって「道の面積」と「道幅×道のど真ん中の長さℓ」は等しくなる

言われた通り、式を作ります。道の面積は(1)で求めたもの、そのままです。また(2)より、道幅×道のど真ん中の長さℓも求まります。同じ形になるので、等しいことがわかります。「道の面積＝道幅×ど真ん中の長さ」で求まることが示されます。

【例題】

右図のように半径rm の池の周りに、幅am の道を作る。
道の真ん中を通る線の長さをℓm、道の面積をSm^{2}とするとき、
$S=a\ell$であることを示そう。



道の面積は、大きな円から小さな円を引けば求められるので、

$S=\pi(r+a)^2-\pi r^2=\pi(r^2+2ar+a^2)-\pi r^2$

$=\pi r^2+2\pi ar+\pi a^2-\pi r^2=2\pi ar+\pi a^2$ … ①

また、ℓは直径が$2r+a$の円の直径なので、$\ell=\pi(2r+a)=2\pi r+\pi a$だから、

$a\ell=a(2\pi r+\pi a)=2\pi ar+\pi a^2$ … ②

①、②より$S=a\ell$と言える。

「円の面積＝半径×半径×π」、「円の直径＝直径×π」を再確認しておきましょう。道の面積は、大きい円から小さい円を引いて求まります。道のど真ん中の長さの求め方もポイントです。道のど真ん中の円の直径は、「小さい円の直径に道幅を足したもの」と等しくなります。ここはとにかく「理解して、練習して、慣れる！」ことが大切です。