中２　教 p26～31　式の利用と等式の変形

図形の面積を文字で表すには？

【要点】

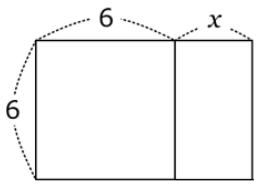
(1) 図形の面積を文字で表すには？

(1) 図を描いて、具体例などから式を導き出す。

文字を使って式に表すことで、色々なメリットがあります。「どんなメリットがあるか？」は後でわかるので、とりあえず練習して慣れておきましょう。
イキナリ文字で考えるのが難しければ、「3 ならどうだろう？」「10 ならどうなるだろう？」と具体例を考えれば、式が見えてきます。

【例題】

1 辺が 6cm の正方形で、横の長さをx cm 長くすると、面積はもとの正方形よりどれだけ大きくなる？



もとの正方形の面積は、$6\times 6=36$

大きくなった面積は、$6\times(6+x)=36+6x$

よって、$36+6x-36=6x$

以上より、$\boldsymbol{6x}$ cm^{2}大きくなる

図を描いて、具体例などを考えることで、頑張って文字を使った式にすることが大切です。

倍数を文字で表すには？

【要点】

(1) 3 の倍数を文字で表すと？　(2) 5 の倍数を文字で表すと？　(3) 3 の倍数になることを示すには？

(1) $3n$ (n は整数)

3 の倍数ということは、「3×☆」ですよね。この☆の部分を文字にするだけです。ただ 1 つ注意点があります。この☆の部分は、整数じゃないとダメです。$\frac{1}{3}$など分数が入っちゃうと、3 の倍数にならない場合もあるからです。使う文字は、 a でも x でも何でもいいですが、整数を表すときは n が多いです。
また 2 つの数を表すには、2 つの文字を使う必要があります。このときは m と n を使うことが多いです。

(2) $5n$ (nは整数)

5 の倍数ということは、5×☆です。やはり整数であることをシッカリ言う必要があります。

(3) 3×(整数)の形を見せて、カッコの中身が整数であることを明記する。

「3 の倍数になることを示す」場合も、「3×(整数)の形」になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

7 の倍数どうしの和は、7 の倍数になる。このことを文字で説明しよう。

2 つの 7 の倍数は、$7m,\ 7n$ ($m,\ n$は整数)と表せる。

この 2 数の和は、$7m+7n=7(m+n)$　分配法則の逆

ここで$m+n$は整数なので、$7(m+n)$は 7 の倍数である。よって、7 の倍数どうしの和は、7 の倍数になる。

2 つの数を表すので、文字は 2 つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また 7 の倍数であることを示すために、7×(整数)となるように式変形しますが、そのときに「分配法則の逆」を使うことも大切です。

連続(れんぞく)する整数を文字で表すには？

【要点】

(1) 連続する２つの整数を文字で表すと？　　(2) 連続する３つの整数を文字で表すと？

(1) $n,\ n+1$ (n は整数)

連続する２つの整数とは、「3 と 4」や、「17 と 18」のことです。「後ろの数は、前の数に＋１したもの」ですよね。だから前の数を n などの文字でおけば、後ろの数はそれに+1 した、 $n+1$ となります。
連続する数を表す場合は、文字は１つで表すことができます。

(2) $n-1,\ n,\ n+1$ (n は整数)

連続する３つの整数とは、「3 と 4 と 5」や、「17 と 18 と 19」のことです。やはり「次の数は前の数に+1 したもの」です。だから先頭の数を n などの文字でおけば、次の数は+1 した $n+1$、さらに次の数は＋１して $n+2$ です。そう考えると、連続３整数は「$n,\ n+1,\ n+2$」と表せます。これでも OK です。
でも、もっと良い方法があります。それは、真ん中の数を n などの文字でおくことです。そうすれば「先頭の数は、真ん中を−1 した $n-1$。最後の数は、真ん中を＋１した $n+1$」となります。連続 3 整数は、「$n-1,\ n,\ n+1$」とおく。この表し方の方が、計算がスッキリすることが多いです。

【例題】

連続する３つの整数の和は３の倍数になる。このことを文字で説明しよう。

連続する３つの整数を、$n-1,\ n,\ n+1$　(nは整数)とする。
この３数の和は、$(n-1)+n+(n+1)=3n$
ここでnは整数なので、$3n$は３の倍数である。よって、連続する３つの整数の和は３の倍数になる。

連続する整数の文字のおきかたに慣れましょう。また３の倍数を表すために n が整数であることを、シッカリ書きましょう。

偶数(ぐうすう)を文字で表すには？

【要点】

(1) 偶数を文字で表すと？　　(2) 偶数であることを示すには？

(1) $2n$ (n は整数)

偶数とは、「2, 4, 6, 8, 10, …」。つまり、２の倍数のことです。だから 2×☆です。もちろん使う文字は、a でも x でも何でもいいですが、整数を表すときは n が多いです。
また２つの数を表すには、２つの文字を使う必要があります。このときは m と n を使うことが多いです。

(2) 2×(整数)の形を見せて、カッコの中が整数であることを明記する。

偶数であることを示すには、2×(整数)の形になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

２つの偶数の和は偶数になることを、文字を使って説明しよう。

２つの偶数は、$2m,\ 2n$ (m, n は整数)と表せる。
この２数の和は、$2m+2n=2(m+n)$　　分配法則の逆
$m+n$は整数なので、$2(m+n)$ は偶数である。よって、２つの偶数の和は偶数になる。

２つの数を表すので、文字は２つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また、偶数であることを示すために、2×(整数)となるように式変形しますが、そのときに「分配法則の逆」を使うことも大切です。

奇数を文字で表すには？

【要点】

(1) 奇数を文字で表すと？　　(2) 奇数であることを示すには？

(1) $2n-1$ (n は整数) もしくは $2n+1$ (n は整数)

奇数とは、「1, 3, 5, 7, 9, …」ですね。これは「偶数から１を引いたもの」です。なので、2×☆−1 で奇数を表せます。もしくは「偶数に１を足したもの」という見方もできます。この場合は 2×☆＋1 です。どちらでも OK です。

(2) 2×(整数)−1 もしくは 2×(整数)＋1 の形を見せて、カッコの中が整数であることを明記する。

奇数であることを示すには、2×(整数)−1 や 2×(整数)＋1 の形になるよう式変形します。そしてカッコの中身が整数であることを、シッカリ言う必要があります。

【例題】

偶数と奇数の和は奇数になることを、文字を使って説明しよう。

偶数と奇数は、$2m,\ 2n-1$ (m, n は整数)と表せる。

この２数の和は、$2m+(2n-1)=2m+2n-1$

$=2(m+n)-1$

$2m+2n$の部分だけで分配法則の逆

$m+n$は整数なので、$2(m+n)-1$ は奇数である。以上より、偶数と奇数の和は奇数になる。

２つの数を表すので、文字は２つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また、奇数であることを示すために、2×(整数)−1 となるように式変形しますが、そのときに「$2m+2n$の部分だけで分配法則の逆」を使うことがポイントです。

連続する２つの偶数(奇数)を文字で表すには？

【要点】

(1) 連続する２つの偶数を文字で表すと？　　(2) 連続する２つの奇数を文字で表すと？

(1) $2n,\ 2n+2$ (n は整数)

連続する２つの偶数とは、「6 と 8」や「12 と 14」などのことです。大切なことは、「前の数が決まれば、後ろの数は自動で決まる」ということです。「後ろの偶数は、前の偶数に＋2 したもの」ですよね。だから前の偶数を$2n$などの文字でおけば、後ろの数はそれに＋2 した、$2n+2$となります。

連続する数を表す場合は、文字は１つで表すことができます。

(2) $2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)

連続する２つの奇数とは、「5 と 7」や「13 と 15」などのことです。これも大切なことは、「後ろの奇数は、前の奇数に＋2 したもの」ですよね。だから前の奇数を$2n-1$などの文字でおけば、後ろの数はそれに＋2 した、$2n+1$となります。

もしも前の奇数を$2n+1$とおけば、後ろの数は＋2 した$2n+3$になりますが、「$2n+1,\ 2n+3$」とおくより、「$2n-1,\ 2n+1$」の方が計算が楽になることが多いです。

【例題】

次の計算は、偶数になるか？奇数になるか？文字を使って判断しよう。

(1) 連続する２つの偶数の和　　(2) 連続する２つの奇数の和

(1) 連続する２つの偶数は、$2n,\ 2n+2$ (n は整数)と表せる。

この２数の和は、$2n+(2n+2)=4n+2=2(n+1)$

$n+1$は整数なので、$2(n+1)$ は偶数である。以上より、連続する２つの偶数の和は偶数になる。

連続する 2 つの偶数は、$2n,\ 2n+2$ (n は整数)と表せます。「和」なのでで足し算して、「偶数を表す形か？奇数を表す形か？」見極(みきわ)めます。途中(とちゅう)で「分配法則の逆」を使うのも、ポイントです。

(2) 連続する 2 つの奇数は、$2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)と表せる。

この 2 数の和は、$(2n-1)+(2n+1)=4n$

nは整数なので、$4n$ は偶数である。以上より、連続する 2 つの奇数の和は偶数になる。

連続する 2 つの奇数は、$2n-1,\ 2n+1$ (n は整数)と表せます。「和」なので足し算して、「偶数を表す形か？奇数を表す形か？」見極(みきわ)めます。$4n$ は 4 の倍数「4, 8, 12, …」のことなので、偶数です。

3 で割ると 1 余る数を文字で表すには？

【要点】

(1) 3 で割ると 1 余る数を文字で表すと？　　(2) 3 で割った余りを調べるには？

(1) $3n+1$ (n は整数)

3 で割ると 1 余る数とは、「1, 4, 7, 10, …」のことです。「3 の倍数に＋1 したもの」ですよね。ので、3 の倍数 $3n$ に＋1 して、$3n+1$ (n は整数)と表せます。

(2) 3×(整数)＋☆ の形にする。☆が余りを表す。

3 で割った余りを調べるには、3×(整数)＋☆の形に式変形をします。3×(整数)の部分が 3 の倍数を表すので、☆の部分が余りです。

【例題】

3 で割ると 1 余る数どうしの和を、3 で割った余りはどうなるか？

2 つの 3 で割ると 1 余る数は、$3m+1,\ 3n+1$ (m, n は整数)と表せる。

それらの和は、$(3m+1)+(3n+1)=3m+3n+2$

$=3(m+n)+2$

$3m+3n$の部分だけで分配法則の逆

$m+n$は整数なので、$3(m+n)+2$ は 3 で割って 2 余る数である。以上より、**余りは 2**

2 つの数を表すので、文字は 2 つ使います。おいた文字が整数であること、最後のカッコの中身が整数であることを、シッカリ書きましょう。また、3 で割った余りを調べるために、3×(整数)＋☆となるように式変形しますが、そのときに「$3m+3n$の部分だけで分配法則の逆」を使うことがポイントです。

十の位が x 、一の位が y の整数を文字で表すには？

【要点】

(1) 十の位が x 、一の位が y の２ケタの整数を文字で表すと？

(1) $10x+y$

「十の位が 2、一の位が 7 である数」は 27 ですよね。当たり前です。これを式で表すなら、「10×2+7」です。お金で考えればわかりやすいです。「10 円が２枚と、１円が７枚」ということです。

「十の位が x 、一の位が y である数」も同じ考え方です。「10 円が x 枚、１円が y 枚」で「$10\times x+7$」です。つまり、$10x+y$ となります。

【例題】

十の位が x 、一の位が y である２ケタの自然数において、十の位と一の位の数字をいれかえてできる自然数と、もとの自然数との和は、11 の倍数になる。その理由を説明しよう。

もとの自然数は、十の位が x 、一の位が y なので、$10x+y$ と表せる。

いれかえてできる自然数は、十の位が y 、一の位が x なので、$10y+x$ と表せる。

この２数の和は、$(10x+y)+(10y+x)=11x+11y$

$$=11(x+y)$$

$x+y$ は整数なので、$11(x+y)$ は 11 の倍数である。以上より、題意(だいい)は示(しめ)された。

「もとの自然数の、十の位と一の位を入れかえる」とは、「もとの数が 27」なら、「いれかえた数は 72」ということです。その２数の和は 27+72=99。確かに 11 の倍数です。

ただこれは「具体例の１つ」なので、説明できたことになりません。文字を使って、「どんなときでも成り立つ」ことを示さなければいけません。

「十の位が x 、一の位が y」である自然数において、十の位と一の位の数字をいれかえると、「十の位が y 、一の位が x」ですよね。なので、その数は $10y+x$ と表せます。

文字について解くとは？

【要点】

(1) 「x について解く」とは、どういう意味？

(2) $a+2=b$ を、$a=$〜の形にしよう。　(3) $a-2=b$ を、$a=$〜の形にしよう。

(4) $2a=b$ を、$a=$〜の形にしよう。　(5) $\frac{a}{2}=b$ を、$a=$〜の形にしよう。

(6) $-a=b-c$ を、$a=$〜の形にしよう。　(7) $b=a$ を、$a=$〜の形にしよう。

(1) $x=$〜 の形にすること

「x について解く」というのは、与えられた式を、「$x=$〜」の形にすることです。どうやるか？「等式の性質」を利用します。等式の性質とは「両辺に同じ式変形をしても、＝の関係が保たれる」というものです。

(2) $a=b-2$

$a+2=b$ を $a=$〜の形にするには、＋2が邪魔なので両辺を－2します。慣れたら「＋2を移項して、－2にする」という感覚です。移項とは、「＝をまたいで動かすと、＋と－が入れかわる」式変形でした。

(3) $a=b+2$

$a+2=b$ を $a=$〜の形にするには、－2が邪魔なので両辺を＋2します。慣れたら「－2を移項して、＋2にする」という感覚です。

(4) $a=\frac{b}{2}$

$2a=b$ を $a=$〜の形にするには、2×が邪魔なので両辺を2で割ります。「分数にして約分で消すには、どうすれば？」を考えても OK です。

(5) $a=2b$

$\frac{a}{2}=b$ を $a=$〜の形にするには、分母の2が邪魔なので両辺に2をかけます。これも「約分で消すには、どうすれば？」を考えても OK です。

(6) $a=-b+c$

$-a=b-c$ を $a=$〜の形にするには、－が邪魔なので両辺に－1をかけます。慣れたら「全部の＋と－をひっくり返す」感覚です。

(7) $a=b$

これは移項ではなく、ひっくり返す感覚です。「1+2=3」を「3=1+2」としても問題ないですよね。

【例題】

次の式を、[　]内の文字について解こう。

(1) $x=-2y+3z$　[y]　　(2) $V=\frac{1}{3}Sh$　[S]

(1)

$x=-2y+3z$　より、

$2y=-x+3z$　　＊ x と $-2y$ を移項

$\boldsymbol{y=\frac{-x+3z}{2}}$　　＊ 両辺を2で割る

最後、分数を分解して、$y=-\frac{x}{2}+\frac{3z}{2}$ としても OK。

(2)

$V=\frac{1}{3}Sh$　より、

$\frac{1}{3}Sh=V$　　＊ ひっくり返す

$Sh=3V$　　＊ 両辺を3倍

$\boldsymbol{S=\frac{3V}{h}}$　　＊ 両辺を h で割る