# 中３　教 p10～23

# 多項式の展開

| [Q] 単項式×多項式の計算は？ | 優先1 |
|---|---|

[A]

単項式と多項式の乗法は、分配法則を使います。

● $a(b+c)=ab+ac$

(例) $2(3x+4y)=2\times 3x+2\times 4y=\boldsymbol{6x+8y}$

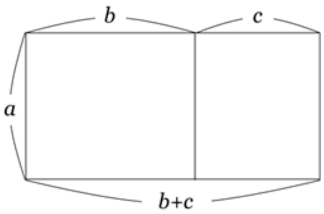
● $(b+c)a=ba+ca$

(例) $(5x-6y)\times(-7x)$

$=5x\times(-7x)-6y\times(-7x)$

$=\boldsymbol{-35x^2+42xy}$

「なぜ分配法則が成り立つか？」は、長方形の面積を考えると、わかりやすいです。




[例] 次の計算をしよう。

(1) $3x(x-5y)$

(2) $-a(-a+2b-3)$

(3) $(7x-2y-5z)\times(-4y^2)$

[解答]

(1) (与式)$=3x\times x+3x\times(-5y)=\boldsymbol{3x^2-15xy}$

(2) (与式)$=-a\times(-a)-a\times 2b-a\times(-3)$

$=\boldsymbol{a^2-2ab+3a}$

(3) (与式)

$=7x\times(-4y^2)-2y\times(-4y^2)-5z\times(-4y^2)$

$=\boldsymbol{-28xy^2+8y^3+20y^2z}$

＊ 分配法則に慣れよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

| [Q] 多項式÷単項式の計算は？ | 優先1 |
|---|---|

[A]

多項式÷単項式の計算は、わり算をかけ算に直せば、分配法則を利用できる。

(例) $(9a^2-6ab)\div\frac{3}{4}a$

$=(9a^2-6ab)\times\frac{4}{3a}$

$=9a^2\times\frac{4}{3a}-6ab\times\frac{4}{3a}=\boldsymbol{12a-8b}$

$\frac{3}{4}a=\frac{3a}{4}$と同じ意味なので、$\div\frac{3}{4}a$は、$\times\frac{4}{3a}$と変形できます。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(-6x^2y+8xy^2)\div\frac{2}{3}xy$

(2) $(10ab^2-25b^3)\div(-5b^2)$

[解答]

(1) (与式)$=(-6x^2y+8xy^2)\times\frac{3}{2xy}$

$=-6x^2y\times\frac{3}{2xy}+8xy^2\times\frac{3}{2xy}=\boldsymbol{-9x+12y}$

(2) (与式)$=(10ab^2-25b^3)\times(-\frac{1}{5b^2})$

$=10ab^2\times\left(-\frac{1}{5b^2}\right)-25b^3\times\left(-\frac{1}{5b^2}\right)$

$=\boldsymbol{-2a+5b}$

＊ わり算をかけ算に直そう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

| [Q] 多項式×多項式の計算は？ | 優先1 |
|---|---|

[A]

( 多項式 )×( 多項式 )を、☆＋△＋…＋□のような形にすることを展開といいます。展開するには、カッコをまたいで全パターンかけ合わせます。

● $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(例) $(x+2)(3x-4)$

$=x\times 3x+x\times(-4)+2\times 3x+2\times(-4)$

$=3x^2-4x+6x-8=\boldsymbol{3x^2+2x-8}$

「なぜ成り立つか？」は別で見ます。とりあえず計算できるようになりましょう！展開した後、$-4x+6x=2x$のように同類項を整理することを、忘れないようにしましょう！

[例] 次の式を展開しよう。

(1) $(6x-y)(5x+3y)$

(2) $(-4a+b)(-2a+3b)$

[解答]

(1) (与式)$=6x\times 5x+6x\times 3y-y\times 5x-y\times 3y$

$=30x^2+18xy-5xy-3y^2$

$=\mathbf{30x^2+13xy-3y^2}$

(2) (与式)

$=-4a\times(-2a)-4a\times 3b+b\times(-2a)+b\times 3b$

$=8a^2-12ab-2ab+3b^2=\mathbf{8a^2-14ab+3b^2}$

＊ カッコをまたいで全パターンかけ合わせよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

[Q] $(a+b)(c+d)$の展開はなぜ成り立つ？ | 優先(ゆうせん)3

[A]

なぜ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ が成り立つのでしょうか？2 つの考え方ができます。

(考え方 1) 長方形の面積で考える

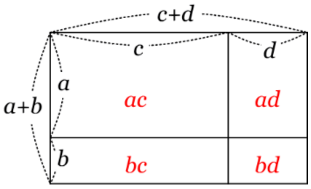
$(a+b)(c+d)$ は、

右図の大きい長方形の

面積です。

4 つの長方形の面積の

合計と等しいです。




以上より、$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

(考え方 2) おきかえて分配法則を利用する

$(a+b)(c+d)$ において、$a+b=M$ とすると、

$M(c+d)=Mc+Md$

$M$を元の$a+b$に戻すと、

$(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$

以上より、$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

＊ 「おきかえ」は今後いっぱい使います。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

[Q] 3 つ以上の多項式どうしの乗法は？ | 優先(ゆうせん)1

[A]

( 多項式 )×( 多項式 )の展開は、$(a+b)(c+d)$ に限らず、カッコをまたいで全パターンかけ合わせます。

● $(a+b)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

(例) $(5a-4b)(3a+2b-c)$

$=5a\times 3a+5a\times 2b+5a\times(-c)-4b\times 3a$

$-4b\times 2b-4b\times(-c)$

$=15a^2+10ab-5ac-12ab-8b^2+4bc$

$=\mathbf{15a^2-2ab-8b^2+4bc-5ca}$

これも「なぜ成り立つ？」は、「長方形の面積」や「おきかえて分配法則」で考えれば、わかります。

[例] $(2x-5y+3z)(-x+4z)$ を展開しよう。

[解答]

(与式)

$=2x\times(-x)+2x\times 4z-5y\times(-x)-5y\times 4z$

$+3z\times(-x)+3z\times 4z$

$=-2x^2+8xz+5xy-20yz-3xz+12z^2$

$=\mathbf{-2x^2+12z^2+5xy-20yz+5zx}$

＊ カッコをまたいで全パターンかけ合わせよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

⇒ 練習プリント p5

| [Q] 展開の公式とは？その１ | 優先1 |
|---|---|

[A]

展開計算を速くするための公式があります。全部で４つありますが、ここでは１つ目を確認します。

● $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+(a\times b)$

(例) $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

なぜ成り立つのか？普通に展開すればわかります。ので、公式と思うのではなく、「普通の展開を素早く暗算」でも問題ありません。

$x^2+\underline{5}x+\underline{6}$

たし算　かけ算

2+3　2×3

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x+9)(x-2)$

(2) $(y-7)(y+4)$

(3) $(a-3)(a-8)$

[解答]

(1) (与式)= $\boldsymbol{x^2+7x-18}$

(2) (与式)= $\boldsymbol{y^2-3y-28}$

(3) (与式)= $\boldsymbol{a^2-11a+24}$

＊ 「普通の展開を素早く暗算」でも OK。

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

| [Q] 展開の公式とは？その２ | 優先1 |
|---|---|

[A]

展開計算を速くするための公式があります。全部で４つありますが、ここでは２つ目を確認します。

● $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

(例) $(x+3)^2=x^2+6x+9$

$x^2+\underline{6}x+\underline{9}$

2倍　2乗

3×2　3×3

なぜ成り立つのか？普通に展開すればわかります。が、これはシッカリ公式として覚えておく方が、後で楽チンになります。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x+5)^2$

(2) $(y+11)^2$

(3) $(a+\frac{1}{2})^2$

[解答]

(1) (与式)= $\boldsymbol{x^2+10x+25}$

(2) (与式)= $\boldsymbol{y^2+22y+121}$

(3) (与式)= $\boldsymbol{a^2+a+\frac{1}{4}}$

＊ 「２倍！２乗！」公式をシッカリおさえよう。

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

| [Q] 展開の公式とは？その３ | 優先1 |
|---|---|

[A]

展開計算を速くするための公式があります。全部で４つありますが、ここでは３つ目を確認します。とはいっても、２つ目とほぼ同じです。

● $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

(例) $(x-3)^2=x^2-6x+9$

$x^2\underline{-6}x+\underline{9}$

2倍　2乗

(-3)×2　(-3)×(-3)

２番目と同じ考えですね。「−３を、２倍、２乗」です。なぜ成り立つのか？普通に展開すればわかります。これもシッカリ公式として覚えておく方が、後で楽チンになります。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x-4)^2$

(2) $(y-12)^2$

(3) $(a-\frac{3}{2})^2$

[解答]

(1) (与式)= $\boldsymbol{x^2-8x+16}$

(2) (与式)= $\boldsymbol{y^2-24y+144}$

(3) (与式)= $\boldsymbol{a^2-3a+\frac{9}{4}}$

＊ 「2 倍！2 乗！」公式をシッカリおさえよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

| [Q] 展開の公式とは？その 4 | 優先1 |
|---|---|

[A]

展開計算を速くするための公式があります。全部で 4 つありますが、ここでは 4 つ目を確認します。

● $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

(例) $(x+3)(x-3)=x^2-9$

$x^2-9$
2乗 ひ 2乗
x×x < 3×3

「文字と数字の部分が同じで、＋と－が逆の形」なら「2 乗ひく 2 乗」です。なぜ成り立つのか？普通に展開すればわかります。これもシッカリ公式として覚えておく方が、後で楽チンになります。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x+7)(x-7)$

(2) $(-2+a)(2+a)$

[解答]

(1) (与式)= $\boldsymbol{x^2-49}$

(2) (与式)= $(a-2)(a+2)=\boldsymbol{a^2-4}$

＊ 「2 乗ひく 2 乗！」公式をシッカリおさえよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

⇒ 練習プリント p7

| [Q] 展開公式 1 の置き換えとは？ | 優先1 |
|---|---|

[A]

文字を置き換えることで、いろいろな展開が楽にできるようになります。

(例) $(2x+3)(2x-5)$ の展開

$2x=A$ とすると、$(A+3)(A-5)$ となる。

展開公式より、$(A+3)(A-5)=A^2-2A-15$

$A$ を元の$2x$ に戻すと、

$(2x)^2-2(2x)-15=\boldsymbol{4x^2-4x-15}$

実はこの問題では、「普通の展開を素早く暗算」でやる方が楽チンです。僕も置き換えではなく、素早く暗算でやってます。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(3a-2)(3a+5)$

(2) $(-4x+5y)(-4x-3y)$

[解答]

(1) $3a=A$ とすると、

$(A-2)(A+5)=A^2+3A-10$

$=(3a)^2+3(3a)-10$

$=\boldsymbol{9a^2+9a-10}$

(2) $-4x=A$ とすると、

$(A+5y)(A-3y)=A^2+2yA-15y^2$

$=(-4x)^2+2y(-4x)-15y^2$

$=\boldsymbol{16x^2-8xy-15y^2}$

＊ 「普通の展開を素早く暗算」でも OK。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 授業動画 | | 質問メモ | |

| [Q] 2 乗の展開公式 2,3 をまとめると？ | 優先1 |
|---|---|

[A]

展開公式 2, 3 で、2 乗の展開を勉強しましたよね。

● $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

● $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

でした。でも慣れている人は、こんな考え方してません。公式 2 コもいらないです。次の感覚だけです。

(前＋後)$^2$ = 前$^2$ ＋ 2 × 前 × 後 ＋ 後$^2$

(例 1) $(2x+3)^2$ の展開

$(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2$

$=\mathbf{4x^2+12x+9}$

(例 2) $(3p-5q)^2$ の展開

$(3p-5q)^2=(3p)^2+2\times 3p\times(-5q)+(-5q)^2$

$=\mathbf{9p^2-30pq+25q^2}$

なぜこうできるのか？これも置き換えているからです。例 2 だと、$3p=x,\ -5q=a$ と置き換えます。そして$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ を利用してます。

2 乗の公式は、(前＋後)$^2$ = 前$^2$ ＋2×前×後＋後$^2$

コレ 1 つだけで、おさえておきましょう！

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(4a+3)^2$

(2) $(2x-\frac{3}{4}y)^2$

[解答]

(1) (与式) $=(4a)^2+2\times 4a\times 3+3^2$

$=\mathbf{16a^2+24a+9}$

(2) (与式) $=(2x)^2+2\times 2x\times(-\frac{3}{4}y)+(-\frac{3}{4}y)^2$

$=\mathbf{4x^2-3xy+\frac{9}{16}y^2}$

＊ (前＋後)$^2$ = 前$^2$ ＋2×前×後＋後$^2$ でやる！

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|
| | | | |

[Q] 展開公式 4 の置き換えとは？ 優先(ゆうせん)1

[A]

展開公式 4 も、2 乗の展開公式のように考えると楽チンです。つまり $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ を…

(前－後)(前－後) = 前$^2$ － 後$^2$

という感覚で見ます。

(例) $(2m+3n)(2m-3n)$ の展開

$(2m+3n)(2m-3n)=(2m)^2-(3n)^2$

$=\mathbf{4m^2-9n^2}$

なぜこうできるのか？これも置き換えです。例だと、$2m=x,\ 3n=a$ と置き換えます。そして $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ を利用してます。

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(3a-4b)(3a+4b)$

(2) $(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y)$

(3) $(-2a+5)(-2a-5)$

(4) $(-0.3p+0.7q)(0.3p+0.7q)$

[解答]

(1) (与式) $=(3a)^2-(4b)^2=\mathbf{9a^2-16b^2}$

(2) (与式) $=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)^2=\mathbf{\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2}$

(3) (与式) $=(-2a)^2-(5)^2=\mathbf{4a^2-25}$

(4) (与式)$=(0.7q-0.3p)(0.7q+0.3p)$

$=(0.7q)^2-(0.3p)^2=\mathbf{0.49q^2-0.09p^2}$

＊ (前＋後)(前－後) = 前$^2$ － 後$^2$ でやる！

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|
| | | | |

[Q] 展開公式を組み合わせる計算は？ 優先(ゆうせん)1

[A]

ここまで展開公式を学んできました。一度まとめておきましょう。

● $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+(a\times b)$

… 「足し算とかけ算」or「素早く暗算」

● $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

● $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

… $(前+後)^2=前^2+2\times前\times後+後^2$

● $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

… $(前+後)(前-後)=前^2-後^2$

意味不明なら、それぞれのところを復習しましょう。さて、これらを組み合わせる計算もでてきます。そのときに 1 つ注意点があります。それは、計算結果にカッコをつけることです。

(例) $(x+4)(x-6)-(x-5)^2$

$=(x^2-2x-24)-(x^2-10x+25)$

$=x^2-2x-24-x^2+10x-25$

$=\boldsymbol{8x-49}$

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x+1)(x+2)-(x+3)(x-4)$

(2) $(3x+5y)(3x-5y)-(2x+3y)^2$

(3) $4(a+5)(a-2)-(2a-3)(2a+3)$

[解答]

(1) (与式)$=(x^2+3x+2)-(x^2-x-12)$

$=x^2+3x+2-x^2+x+12$

$=\boldsymbol{4x+14}$

(2) (与式)$=(9x^2-25y^2)-(4x^2+12xy+9y^2)$

$=9x^2-25y^2-4x^2-12xy-9y^2$

$=\boldsymbol{5x^2-12xy-34y^2}$

(3) (与式)$=4(a^2+3a-10)-(4a^2-9)$

$=4a^2+12a-40-4a^2+9$

$=\boldsymbol{12a-31}$

＊ 展開公式の計算結果にカッコをつけよう。

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

[Q] 複雑な式の展開は？ 優先(ゆうせん)2

[A]

展開は「カッコまたいで全パターン」をすれば、答えは出せる。けど、置き換えれば楽チンになることも多いです。

(例) $(a+b+1)^2$の展開

$a+b=A$ とすると、

(与式)$=(A+1)^2$

$=A^2+2A+1$

$=(a+b)^2+2(a+b)+1$

$=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

[例] 次の計算をしよう。

(1) $(x-y-4)^2$

(2) $(2a+3b+4)(2a+3b-4)$

(3) $(4x+3y-2z)(4x-3y+2z)$

[解答]

(1) $x-y=A$ とすると、

(与式)$=(A-4)^2$

$=A^2-8A+16$

$=(x-y)^2-8(x-y)+16$

$=\boldsymbol{x^2-2xy+y^2-8x+8y+16}$

(2) $2a+3b=A$ とすると、

(与式)$=(A+4)(A-4)$

$=A^2-16$

$=(2a+3b)^2-16$

$=\boldsymbol{4a^2+12ab+9b^2-16}$

(3) (与式)$=(4x+3y-2z)\{4x-(3y-2z)\}$

ここで、$3y-2z=A$ とすると、

(与式)$=(4x+A)(4x-A)$

$=16x^2-A^2$

$=16x^2-(3y-2z)^2$

$=16x^2-(9y^2-12yz+4z^2)$

$=\boldsymbol{16x^2-9y^2-4z^2+12yz}$

＊ 置き換えを見つければ楽チンに！

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

| [Q] 展開公式で計算の工夫とは？ | 優先(ゆうせん)1 |
|---|---|

[A]

展開公式を利用すると、計算が楽チンになることもあります。

(例 1) $51^2$ の計算

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$51^2 = (50+1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1^2$

$= 2500 + 100 + 1 = \mathbf{2601}$

(例 2) $31 \times 29$ の計算

$31 \times 29 = (30+1)(30-1)$

$= 30^2 - 1^2$

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

$= 900 - 1 = \mathbf{899}$

[例] 工夫をして、次の計算をしよう。

(1) $102^2$

(2) $49^2$

(3) $68 \times 72$

[解答]

(1) (与式)$= (100+2)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 + 400 + 4 = \mathbf{10404}$

(2) (与式)$= (50-1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times (-1) + (-1)^2$

$= 2500 - 100 + 1 = \mathbf{2401}$

(3) (与式) $= (70-2)(70+2)$

$= 70^2 - 2^2$

$= 4900 - 4 = \mathbf{4896}$

＊ 理解して練習して慣れよう！

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

| [Q] 展開公式の式の値への利用とは？ | 優先(ゆうせん)1 |
|---|---|

[A]

文字の値がわかっている時に式の値を求めるには、整理してから代入します。

(例) $x = \frac{2}{3}$のとき、$(x+3)^2 - (x+1)(x+2)$の値

$(x+3)^2 - (x+1)(x+2)$

$= x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 3x + 2)$

$= 3x + 7$より、

$x = \frac{2}{3}$を代入して、$3 \times \frac{2}{3} + 7 = \mathbf{9}$

[例] $a = \frac{3}{4}$のとき、$(a+4)^2 - (a-1)(a-3)$ の値を求めよう。

[解答]

(与式)$= a^2 + 8a + 16 - (a^2 - 4a + 3)$

$= 12a + 13$より、

$a = \frac{3}{4}$を代入して、$12 \times \frac{3}{4} + 13 = \mathbf{22}$

＊ 整理してから代入する！

| 授業動画 | | 質問メモ | |
|---|---|---|---|

⇒ 練習プリント p9